Ecuaciones equivalentes

Investiguemos qué hace que dos ecuaciones sean equivalentes.

6.1 Dos expresiones

Tu profesor te asignará una de estas expresiones:

$$\frac{n^2 - 9}{2(4-3)} \qquad \text{o} \qquad (n+3) \cdot \frac{n-3}{8 - 3 \cdot 2}$$

Evalúa tu expresión cuando n es:

1. 5
2. -1
3. Con tu compañero, selecciona otros 2 valores para evaluar. Considera diferentes tipos de números como fracciones, decimales, números grandes, números pequeños, números negativos, etc.

6.2 Mucho ruido y pocos años

1. Escribe tantas ecuaciones como sea posible que representen la relación entre las edades de los dos hijos de cada familia. Prepárate para explicar qué representa cada parte de tu ecuación.
   a. En la familia A, el hijo menor tiene 7 años menos que el mayor, que tiene 18.
   b. En la familia B, el hijo del medio es 5 años mayor que el menor.
2. Tyler piensa que la relación entre las edades de los hijos de la familia B se puede describir con la ecuación $2m - 2y = 10$, donde m es la edad del hijo del medio y y es la edad del hijo menor. Explica por qué tiene razón.
3. ¿Algunas de estas ecuaciones son **equivalentes** a otras? Si es así, ¿cuáles? Explica tu razonamiento.

   $3a + 6 = 15$ $\qquad$ $3a = 9$ $\qquad$ $a + 2 = 5$ $\qquad$ $\frac{1}{3}a = 1$

¿Estás listo para más?

Este es un acertijo:

$$\begin{aligned} m + m &= N \\ N + N &= p \\ m + p &= Q \\ p + Q &= ? \end{aligned}$$

¿Cuáles expresiones son iguales a $p + Q$?

$2p + m$ $\qquad$ $4m + N$ $\qquad$ $3N$ $\qquad$ $9m$

6.3 ¿Qué es aceptable?

Noah compra unos jeans y usa un cupón de 10% de descuento. El precio total es \$56.70, que incluye \$2.70 de impuesto a las ventas. La compra de Noah se puede modelar con la ecuación:

$$x - 0.1x + 2.70 = 56.70$$

1. Discute con un compañero:
    a. En esta situación, ¿qué significa la solución de la ecuación?
    b. ¿Cómo puedes comprobar que 70 no es una solución y que 60 sí es la solución?

2. Estas son ecuaciones relacionadas con $x - 0.1x + 2.70 = 56.70$. Cada una resulta de realizar una o más movidas en la ecuación original y también puede interpretarse en términos de la compra de Noah. En cada ecuación, decide qué movida se hizo o cómo se puede interpretar la ecuación (se dan unos ejemplos). Luego, comprueba si 60 es la solución de la ecuación.

    Ecuación A $\quad 100x - 10x + 270 = 5,670$

    - ¿Qué se hizo?
    - ¿Cuál es la interpretación? El precio se expresa en centavos en vez de dólares.
    - ¿Tiene la misma solución?

    Ecuación B $\quad x - 0.1x = 54$

    - ¿Qué se hizo? Restar 2.70 a ambos lados de la ecuación.
    - ¿Cuál es la interpretación?
    - ¿Tiene la misma solución?

    Ecuación C $\quad 0.9x + 2.70 = 56.70$

    - ¿Qué se hizo?
    - ¿Cuál es la interpretación? 10% de descuento quiere decir que se paga el 90% del precio original. El 90% del precio original más el impuesto a las ventas es \$56.70.
    - ¿Tiene la misma solución?

3. Estas son otras ecuaciones. En cada ecuación, determina qué movida se hizo o cómo se puede interpretar la ecuación. Luego, comprueba si 60 es la solución de la ecuación.

Ecuación D $x - 0.1x = 56.70$

- ¿Qué se hizo?
- ¿Cuál es la interpretación? El precio luego de usar el cupón de 10% de descuento y antes del impuesto a las ventas es $56.70.
- ¿Tiene la misma solución?

Ecuación E $x - 0.1x = 59.40$

- ¿Qué se hizo? Restar 2.70 a la izquierda y sumar 2.70 a la derecha.
- ¿Cuál es la interpretación?
- ¿Tiene la misma solución?

Ecuación F $2(x - 0.1x + 2.70) = 56.70$

- ¿Qué se hizo?
- ¿Cuál es la interpretación? El precio de 2 jeans, luego de usar el cupón de 10% de descuento y pagar el impuesto a las ventas, es $56.70.
- ¿Tiene la misma solución?

4. ¿Cuáles de estas seis ecuaciones son equivalentes a la ecuación original? Prepárate para explicar cómo lo sabes.

Resumen de la lección 6

Supongamos que compramos 2 paquetes de marcadores y una barra de pegamento de $0.50, y en total pagamos $6.10. Si p es el costo en dólares de 1 paquete de marcadores, la ecuación $2p + 0.50 = 6.10$ representa esta compra. La solución de esta ecuación es 2.80. Ahora supongamos que un amigo compra 6 de los mismos paquetes de marcadores y 3 barras de pegamento de $0.50, y paga $18.30. La ecuación $6p + 1.50 = 18.30$ representa esta compra. La solución de esta ecuación también es 2.80.

Podemos decir que $2p + 0.50 = 6.10$ y $6p + 1.50 = 18.30$ son **ecuaciones equivalentes** porque tienen exactamente la misma solución. Ningún otro valor de p, además de 2.80, hace que cualquiera de las ecuaciones sea verdadera. Únicamente el precio de $2.80 por cada paquete de marcadores satisface la restricción de cada compra.

$2p + 0.50 = 6.10$	¿Cómo encontramos ecuaciones equivalentes como estas?
$6p + 1.50 = 18.30$	¡Hay ciertas movidas que podemos hacer!

En este ejemplo, la segunda ecuación, $6p + 1.50 = 18.30$, es el resultado de multiplicar por 3 cada lado de la primera ecuación. Comprar 3 veces más marcadores y barras de pegamento significa pagar 3 veces más dinero. El precio por unidad de los marcadores no ha cambiado.
Estas son otras ecuaciones que son equivalentes a $2p + 0.50 = 6.10$, junto con las movidas que nos llevan a estas ecuaciones.

- $2p + 4 = 9.60$ — Sumar 3.50 a cada lado de la ecuación original.
- $2p = 5.60$ — Restar 0.50 de cada lado de la ecuación original.
- $\frac{1}{2}(2p + 0.50) = 3.05$ — Multiplicar por $\frac{1}{2}$ cada lado de la ecuación original.
- $2(p + 0.25) = 6.10$ — Aplicar la propiedad distributiva para reescribir el lado izquierdo.

En cada caso:

- La movida es aceptable porque no cambia la igualdad de los dos lados de la ecuación. Si $2p + 0.50$ tiene el mismo valor de 6.10, entonces multiplicar $2p + 0.50$ por $\frac{1}{2}$ y multiplicar 6.10 por $\frac{1}{2}$ mantiene los dos lados iguales.
- Solo $p = 2.80$ hace que la ecuación sea verdadera. Cualquier valor de p que hace que una ecuación sea falsa también hace que las otras ecuaciones equivalentes sean falsas. (¡Inténtalo!).

Estas movidas —aplicar la propiedad distributiva, sumar la misma cantidad a ambos lados, dividir cada lado entre el mismo número, etc.— pueden parecernos conocidas porque las hemos realizado cuando resolvemos ecuaciones. Resolver una ecuación, fundamentalmente, implica escribir una serie de ecuaciones equivalentes que al final aíslan la variable en un lado.

¡Sin embargo, no todas las movidas que hacemos en una ecuación crean ecuaciones equivalentes! Por ejemplo, si restamos 0.50 al lado izquierdo pero sumamos 0.50 al lado derecho, el resultado es $2p = 6.60$. La solución de esta ecuación es 3.30, no 2.80. Esto significa que $2p = 6.60$ *no* es equivalente a $2p + 0.50 = 6.10$.

