Interés compuesto

Exploremos distintas formas de aplicar repetidamente un aumento porcentual.

16.1 Cinco años después

Cada año te cobran un interés del 12% por un préstamo de $500. Si no haces pagos para reducir la deuda, ¿cuál será el valor de la deuda después de 5 años?

Escribe una expresión que represente el valor de la deuda y evalúala para encontrar la respuesta en dólares.

16.2 Ampliemos imágenes

Andre y Mai necesitan ampliar dos imágenes para un proyecto en grupo. Las dos imágenes tienen el mismo tamaño al comienzo.

Andre hace un copia a escala de su imagen. Él aumenta el largo y el ancho en 10%. La imagen sigue pequeña, así que aumenta de nuevo el largo y el ancho en 10%.

Mai dice: “Si agrando mi imagen aumentando el largo y el ancho en 20%, nuestras imágenes tendrán exactamente el mismo tamaño”.

¿Estás de acuerdo con Mai? Explica o muestra tu razonamiento.

¿Estás listo para más?

¿Qué harías si quieres calcular $5 \cdot (1.01)^{10}$, pero no tienes calculadora? Siempre y cuando el valor que estés multiplicando sea cercano a 1, puedes hacer una estimación usando suma en vez de multiplicación. $5 + (0.01) \cdot 10 = 5.1$ se aproxima bastante al valor real de la expresión original, que es aproximadamente 5.523.

- La cantidad $(1.02)^7$ es difícil de calcular manualmente. Calcula mentalmente $1 + (0.02) \cdot 7$ para obtener una buena aproximación de la cantidad.
- Estima $(0.99)^9$. Usa una calculadora para comparar tu estimación con el valor real.
- Estima $(1.6)^{11}$. Usa una calculadora para comparar tu estimación con el valor real. ¿En qué se diferencia este ejemplo de los anteriores?

16.3 Ganancias por intereses

Una cuenta bancaria tiene una tasa de interés mensual del 1% y un saldo inicial de $1,000. Los intereses ganados se abonan a la cuenta y no se hacen más depósitos ni retiros.

1. ¿Cuál es el saldo de la cuenta después de 6 meses, 1 año, 2 años y 5 años? Muestra tu razonamiento.

2. Escribe una ecuación que exprese el saldo, a, de la cuenta en términos del número de meses, m. Supón que todos los intereses ganados se siguen abonando a la cuenta y no se hacen otros depósitos ni retiros.

3. ¿Cuánto dinero generará la cuenta en intereses al cabo de 1 año? ¿A qué porcentaje del saldo inicial corresponde eso? Muestra tu razonamiento.

4. El término “rentabilidad anual” se refiere al porcentaje de interés que el titular de una cuenta esperaría recibir al cabo de un año. Discute con tu compañero: Si fueras el banco, ¿promocionarías la cuenta como si tuviera una rentabilidad anual del 12%? ¿Por qué sí o por qué no? Usa lo que has aprendido hasta el momento para explicar tu razonamiento.

Resumen de la lección 16

Supongamos que una atleta corre 4 millas al día este mes. El próximo mes, aumentará la distancia que corre diariamente en 25%. El siguiente mes, la aumentará en 25% con respecto al mes anterior. ¿Dentro de dos meses, correrá 50% más de la distancia que corre a diario actualmente?

Dado que el doble de 25% es 50% y 50% más de su distancia diaria actual es $4 \cdot (1.5)$, podríamos pensar que en dos meses ella correrá 6 millas al día. Pero si calculamos el aumento un mes a la vez, podemos ver que el próximo mes ella correrá $4 \cdot (1.25)$, es decir, 5 millas. Y el siguiente mes ella correrá $5 \cdot (1.25)$, es decir, 6.25 millas.

Así, dentro de dos meses la distancia diaria que corre será en realidad:

$$4 \cdot (1.25)^2$$

Dos aumentos repetidos del 25% en realidad producen un aumento total del 56.25% en vez de un aumento del 50%, porque $1.25^2 = 1.5625$. Cuando aplicamos un aumento porcentual a una cantidad que ya ha tenido antes un aumento porcentual, decimos que hay un *incremento porcentual compuesto* (o *capitalización*, en contextos de dinero).

La capitalización ocurre cuando calculamos el interés del dinero de una cuenta bancaria o de un préstamo. Una cuenta que genera un interés del 2% cada mes realmente no genera un interés del 24% al año porque el interés se aplica no solo a la cantidad inicial, sino también a los intereses que se han generado antes. Supongamos que una cuenta de ahorros tiene $300 y no se hacen depósitos ni retiros. Los saldos de la cuenta después de varios meses se muestran en la tabla.

número de meses	saldo de la cuenta en dólares
1	$300 \cdot (1.02)$
2	$300 \cdot (1.02)^2$
3	$300 \cdot (1.02)^3$
12	$300 \cdot (1.02)^{12}$

$(1.02)^{12} \approx 1.2682$, así que el saldo de la cuenta aumentará aproximadamente 26.82% en un año. A esta tasa se le llama la *tasa de interés efectiva*. Esta refleja cómo cambia realmente el saldo de la cuenta después de un año.

Al 24% se le llama la *tasa de interés nominal.* Es la tasa establecida o publicada y por lo general se usa para determinar las tasas mensuales, semanales o diarias (si el interés se calculara en esos intervalos).

