Funciones definidas a trozos

Conozcamos funciones que están definidas por partes.

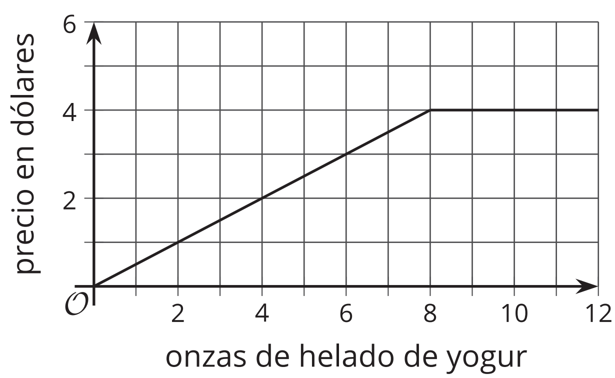
12.1 Helado de yogur

En una tienda de helados de yogur venden porciones de máximo 12 onzas. Se cobra $0.50 por onza para porciones de 0 a 8 onzas y se cobra $4 por una porción de más de 8 onzas y hasta 12 onzas.

¿Cuál gráfica representa el precio de la porción de helado como función de su peso? Prepárate para explicar cómo lo sabes.

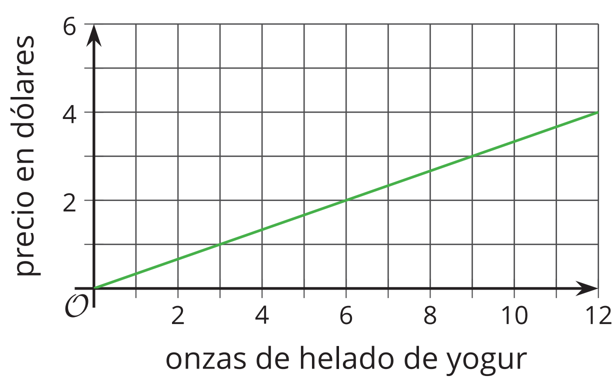
A

B



C

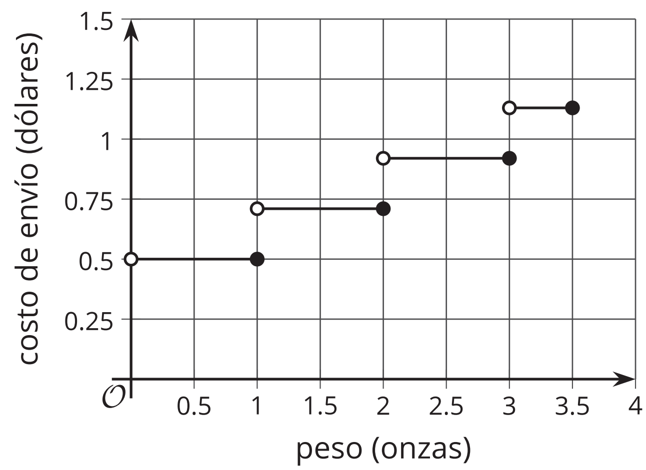
D



12.2 Costos de envío

La relación entre la tarifa de envío y el peso de una carta se puede definir con una **función definida a trozos**.

La gráfica muestra las tarifas de envío estándar de una carta, del 2018.



1. ¿Cuál es el costo de envío de una carta con cada uno de estos pesos?
    a. 1 onza
    b. 1.1 onzas
    c. 0.9 onzas
2. El costo de envío de una carta es \$0.92. ¿Qué sabes acerca del peso de la carta?
3. Kiran y Mai escribieron reglas para representar la función de costo de envío, pero cometieron errores al definir el dominio.

$$K(w) = \begin{cases} 0.50, & 0 \le w \le 1 \\ 0.71, & 1 \le w \le 2 \\ 0.92, & 2 \le w \le 3 \\ 1.13, & 3 \le w \le 3.5 \end{cases} \qquad M(w) = \begin{cases} 0.50, & 0 < w < 1 \\ 0.71, & 1 < w < 2 \\ 0.92, & 2 < w < 3 \\ 1.13, & 3 < w < 3.5 \end{cases}$$

Encuentra el error que cometió cada persona y escribe una versión corregida de sus reglas.

¿Estás listo para más?

Esta imagen muestra las tarifas de envío del servicio postal.

Observa que para describir las distintas tarifas se escribe “Peso de no más de (oz)”.

Explica o haz un dibujo para mostrar cómo cambiaría la gráfica si el servicio postal usara “Peso de menos de (oz)” en la tabla.

Correo de primera clase

Precio unitario

Cartas (con estampilla)

Peso de no más de (oz)	Tarifa
1	$0.50
2	$0.71
3	$0.92
3.5	$1.13

12.3 Alquiler de bicicletas

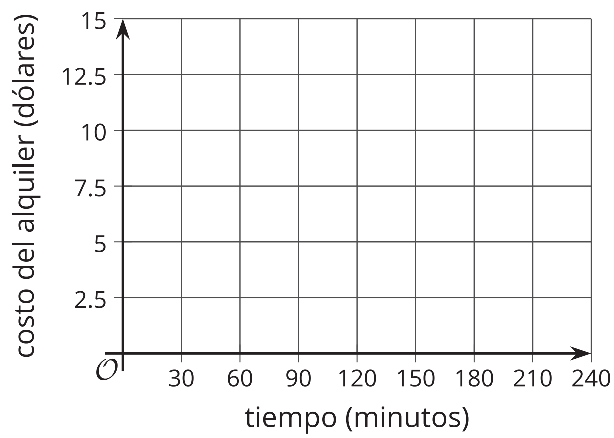
La función C representa el costo en dólares de alquilar una bicicleta durante t minutos. Estas son las reglas que describen la función:

$$C(t) = \begin{cases} 2.50, & 0 < t \leq 30 \\ 5.00, & 30 < t \leq 60 \\ 7.50, & 60 < t \leq 90 \\ 10.00, & 90 < t \leq 120 \\ 12.50, & 120 < t \leq 150 \\ 15.00, & 150 < t \leq 720 \end{cases}$$

1. Completa la tabla con los costos del alquiler de la bicicleta, de acuerdo a su duración.

t (minutos)	C (dólares)
10	
25	
60	
75	
130	
180	

Dibuja la gráfica de la función para los valores de t de 0 minutos a 240 minutos.



2. Describe en palabras las reglas del costo de alquilar una bicicleta.

3. Determina el dominio y el rango de esta función.

12.4 Juntemos los trozos

Tu profesor le va a dar a tu grupo tiras de papel con partes de la gráfica de una función. Las líneas de la cuadrícula están a 1 unidad de distancia.

Organiza las tiras de papel para formar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

$$f(x) = \begin{cases} -5, & -10 < x < -5 \\ x, & -5 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 3 \\ x - 2, & 3 \leq x < 8 \\ 6, & 8 \leq x < 10 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 5.5, & -10 < x \leq -8 \\ 4, & -8 < x \leq -3 \\ -x, & -3 < x \leq 2 \\ -3.5, & 2 < x \leq 5 \\ x - 5, & 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

Para representar la función con precisión, asegúrate de incluir una escala en cada eje y de agregar círculos rellenos y círculos vacíos donde corresponda en la gráfica.

Resumen de la lección 12

Una **función definida a trozos** tiene distintas descripciones, o reglas, para distintas partes de su dominio.

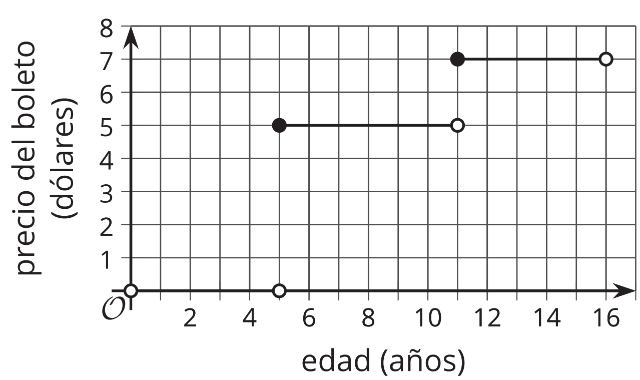
La función f da el precio de un boleto de tren, en dólares, para un niño de t años de edad basándose en estas reglas:

- Gratis para niños de menos de 5 años
- \$5 para niños de al menos 5 años pero menores de 11 años
- \$7 para niños de al menos 11 años pero menores de 16 años

Como hay precios distintos para edades distintas, esto nos dice que la función f es una función definida a trozos.

La gráfica de una función definida a trozos consta a menudo de varias partes o segmentos. Las partes pueden estar unidas o no. Cuando no están unidas, la gráfica parece tener quiebres, saltos o escalones.

Esta es la gráfica que representa f.



Es importante pensar en el valor de la función en los puntos en los que la regla cambia, o en los que la gráfica tiene un “quiebre”. Por ejemplo, cuando un niño tiene exactamente 5 años, ¿el boleto es gratis o cuesta $5?

En la gráfica, un segmento termina en $(5, 0)$ y otro inicia en $(5, 5)$, ¡pero la función no puede tener simultáneamente a 0 y 5 como salidas cuando la entrada es 5!

Según las reglas de los precios de los boletos, el boleto es gratis solo si el niño tiene menos de 5 años, lo que significa que:

- $f(5) = 0$ es falso. En la gráfica, el punto $(5, 0)$ se marca con un círculo vacío para indicar que *no* está incluido en el primer segmento (que representa las edades que tienen derecho a un boleto gratis).
- $f(5) = 5$ es verdadero. El punto $(5, 5)$ tiene un círculo relleno para indicar que sí está incluido en el segmento del medio (que representa las edades que tienen derecho al boleto de $5).

El mismo razonamiento se puede usar al decidir cómo se deben ver $f(11)$ y $f(16)$ en la gráfica.

- $f(11) = 7$ es verdadero porque los niños de 11 años pagan $7. El punto $(11, 7)$ es un círculo relleno.
- $f(16) = 7$ es falso porque un joven de 16 años ya no tiene derecho al precio de un boleto para un niño. El punto $(16, 7)$ es un círculo vacío.

Las reglas del precio de los boletos se pueden expresar con notación de funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 5 \\ 5, & 5 \le x < 11 \\ 7, & 11 \le x < 16 \end{cases}$$