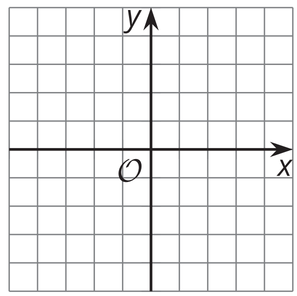
Rectas paralelas en el plano

Investiguemos rectas paralelas en el plano de coordenadas.

5.1 Traslademos rectas

1. En el plano, dibuja una recta que no sea vertical. Después, dibuja 2 traslaciones posibles de la recta.

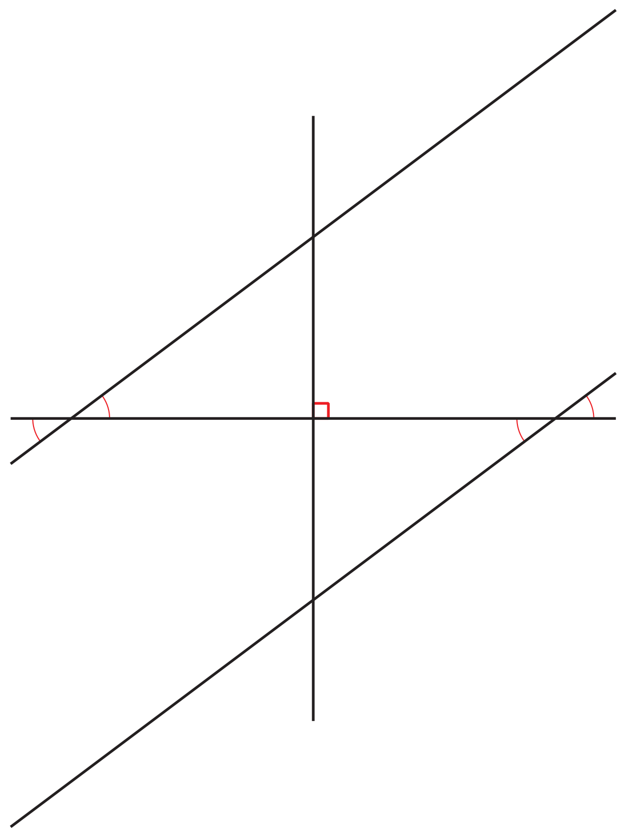


2. Encuentra la pendiente de la recta inicial y las pendientes de sus imágenes.

5.2 La demostración de Priya con triángulos rectángulos

Priya escribió la siguiente demostración:

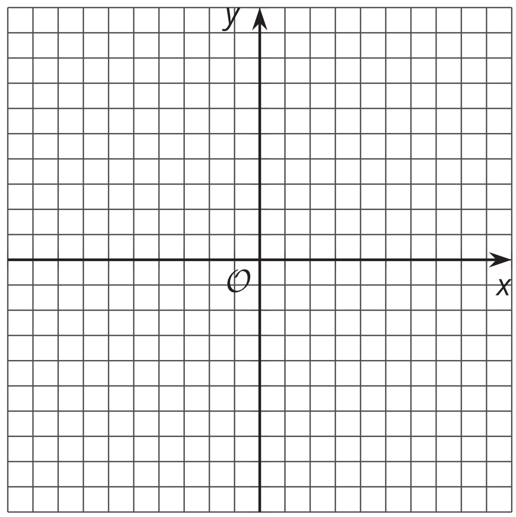
Pensemos en 2 rectas paralelas cualesquiera. Supongamos que no son ni horizontales ni verticales. Construyamos una recta horizontal que se cruce con ambas rectas paralelas. Después, construyamos una recta vertical que pase por el punto medio del segmento horizontal entre las rectas. Se forman 2 triángulos congruentes. Como los triángulos rectángulos tienen un lado horizontal y un lado vertical, podemos usarlos para encontrar la pendiente de las rectas paralelas. Por lo tanto, las rectas paralelas tienen la misma pendiente.



1. ¿Cómo sabe Priya que los 2 triángulos rectángulos son congruentes?

2. ¿Cómo demuestra esto que las pendientes de rectas paralelas son iguales?

5.3 Dos segmentos paralelos



1. Grafica la recta $y = 2x + 3$. Marca con una A el punto $(0, 3)$ en la gráfica.
2. Traslada el punto $(0, 3)$ a $(-2, 5)$ e incluye el segmento de recta dirigido en tu dibujo. Marca con una B este nuevo punto.
3. Elige otro punto que esté en la recta y márcalo con una C. Ahora traslada ese punto usando el mismo segmento de recta dirigido. Marca con una D este nuevo punto.
4. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y D, y grafica la recta.
5. ¿Cómo sabes que AC es paralelo a BD?
6. ¿Cómo sabes que AB es paralelo a CD?

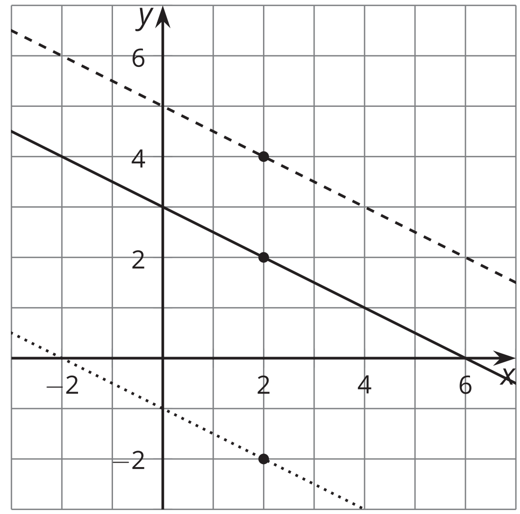
¿Estás listo para más?

Demuestra algebraicamente que la traslación $(x, y) \rightarrow (x + p, y + q)$ lleva una recta a otra recta con la misma pendiente. Puedes comenzar con 2 puntos de la recta, con coordenadas (x, y) y (w, z).

Resumen de la lección 5

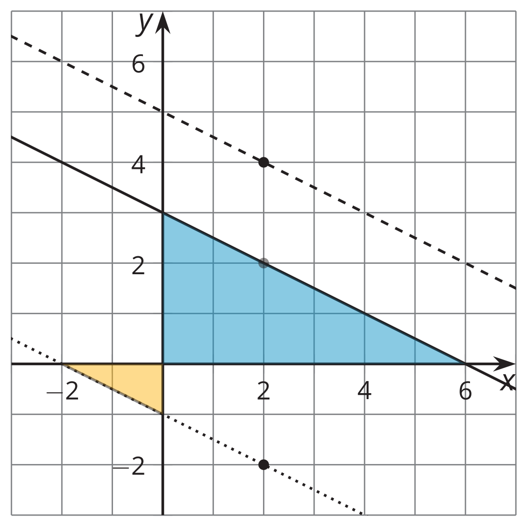
La recta continua se trasladó de 2 maneras diferentes:

1. Usando el segmento de recta dirigido que va de $(2, 2)$ a $(2, 4)$, se obtuvo la recta discontinua de arriba.
2. Usando el segmento de recta dirigido que va de $(2, 2)$ a $(2, \text{-}2)$, se obtuvo la recta punteada de abajo.



Las 3 rectas parecen paralelas entre sí, como cabría esperar. Sabemos que al trasladar rectas se obtienen rectas paralelas.

¿Qué pasa con las pendientes de estas rectas? Si dibujamos los triángulos de pendiente que pasan por el origen, vemos triángulos rectángulos. Como sabemos que las rectas son paralelas, las parejas de ángulos correspondientes de los triángulos deben ser congruentes según el teorema de ángulos alternos internos. Los triángulos con ángulos congruentes son semejantes, y los triángulos de pendiente que son semejantes corresponden a rectas que tienen la misma pendiente. Aquí vemos pendientes de $\text{-}\frac{5}{10}$, $\text{-}\frac{3}{6}$ y $\text{-}\frac{1}{2}$, todas iguales.



Podemos usar un razonamiento parecido para demostrar que 2 rectas paralelas cualesquiera que no sean verticales tienen la misma pendiente, y también que 2 rectas cualesquiera que tienen la misma pendiente son paralelas.

¿Qué pasa si queremos encontrar la ecuación de una recta que sea paralela a estas 3 rectas y que pase por el punto $(6, \text{-}1)$? Sabemos que la recta debe tener la misma pendiente, es decir, $\text{-}\frac{1}{2}$. Podemos usar la forma punto-pendiente, y obtenemos $y + 1 = \text{-}\frac{1}{2}(x - 6)$.