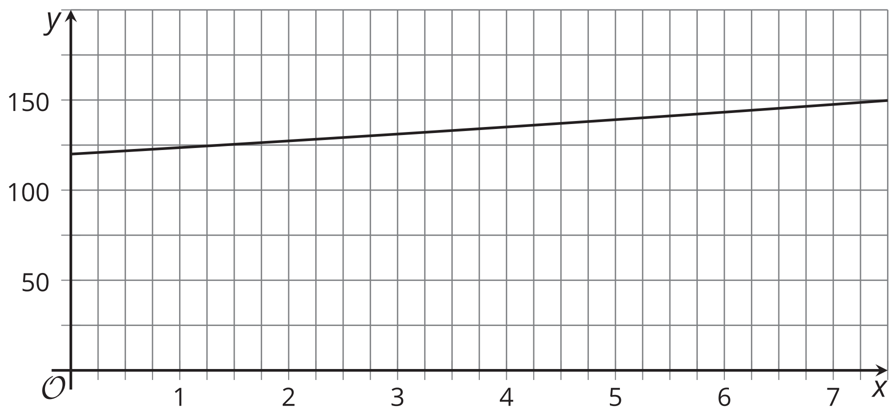
¿Cuál cambia más rápido?

Comparemos funciones lineales y exponenciales a medida que crecen.

19.1 ¿De cuál función es la gráfica?

Considera esta gráfica.



1. ¿Cuál ecuación piensas que representa la gráfica? Usa la gráfica para apoyar tu razonamiento.
    - $y = 120 + (3.7) \cdot x$
    - $y = 120 \cdot (1.03)^x$
2. ¿Qué información podría ayudarte a decidir más fácilmente si la gráfica representa una función lineal o una función exponencial?

 CC BY NC 2024
Illustrative Mathematics®

19.2 Interés simple e interés compuesto

Una familia tiene $1,000 para invertir y está considerando dos opciones: invertir en bonos de inversión del gobierno que ofrecen un interés simple del 2% o invertir en una cuenta de ahorros en un banco, que cobra $20 por abrir la cuenta y paga un interés compuesto del 2%. En ambas opciones los intereses se pagan anualmente.

Estas dos tablas muestran lo que ganarían en los primeros dos años si no invierten cantidades adicionales ni retiran dinero.

Bonos de inversión

años de la inversión	cantidad en dólares
0	$1,000
1	$1,020
2	$1,040

Cuenta de ahorros

años de la inversión	cantidad en dólares
0	$980
1	$999.60
2	$1,019.59

1. Bonos de inversión: ¿Cómo crece la inversión con un interés simple?

2. Cuenta de ahorros: ¿Cómo se calcularon las cantidades $999.60 y $1,019.59?

3. Para cada opción, escribe una ecuación que represente la relación entre la cantidad de dinero y el número de años de la inversión.

4. ¿Cuál opción de inversión debería escoger la familia? Usa tus ecuaciones o cálculos para apoyar tu respuesta.

5. Usa tecnología para graficar las dos opciones de inversión y mostrar cómo crece el dinero en cada una.

19.3 ¿Cuál alcanza 2,000 primero?

1. Completa la tabla de valores de las funciones f y g.
2. Según la tabla de valores, ¿cuál función piensas que crece más rápido? Explica tu razonamiento.
3. ¿Cuál función piensas que alcanzará primero el valor de 2,000? Muestra tu razonamiento. Si tienes dificultades, considera aumentar x en 100 varias veces y anota en la tabla los valores de la función.

$f(x) = 2x$ y $g(x) = (1.01)^x$

x	$f(x)$	$g(x)$
1		
10		
50		
100		
500		

¿Estás listo para más?

Considera las funciones $g(x) = x^5$ y $f(x) = 5^x$. Aunque, por ejemplo, es cierto que $f(7) > g(7)$, es difícil comprobarlo con un cálculo mental. Encuentra un valor de x para el cual las propiedades de los exponentes te permiten concluir que $f(x) > g(x)$ sin usar una calculadora.

Resumen de la lección 19

Supongamos que ganas el premio mayor de un concurso y te dan dos opciones. La primera opción es un regalo de \$10,000 en efectivo y \$1,000 al día durante los siguientes 7 días. La segunda opción es un regalo de 1 centavo en efectivo (es decir, \$0.01) que crece multiplicándose por diez cada día durante 7 días. Debes esperar los 7 días y recibirás todo el dinero del premio al final de la semana. ¿Cuál opción escogerías?

En la primera opción, la cantidad de dinero aumenta la misma cantidad (\$1,000) cada día, así que podemos representarla con una función lineal. En la segunda opción, la cantidad de dinero crece por múltiplos de 10, por lo que podemos representarla con una función exponencial. Llamemos f a la cantidad de dinero que se ha recibido con la primera opción x días después de ganar. Llamemos g a la cantidad de dinero que se ha recibido con la segunda opción x días después de ganar.

Opción 1: $f(x) = 10{,}000 + 1{,}000x$

$f(1) = 11{,}000$
$f(2) = 12{,}000$
$f(3) = 13{,}000$
...
$f(6) = 16{,}000$
$f(7) = 17{,}000$

Opción 2: $g(x) = (0.01) \cdot 10^x$

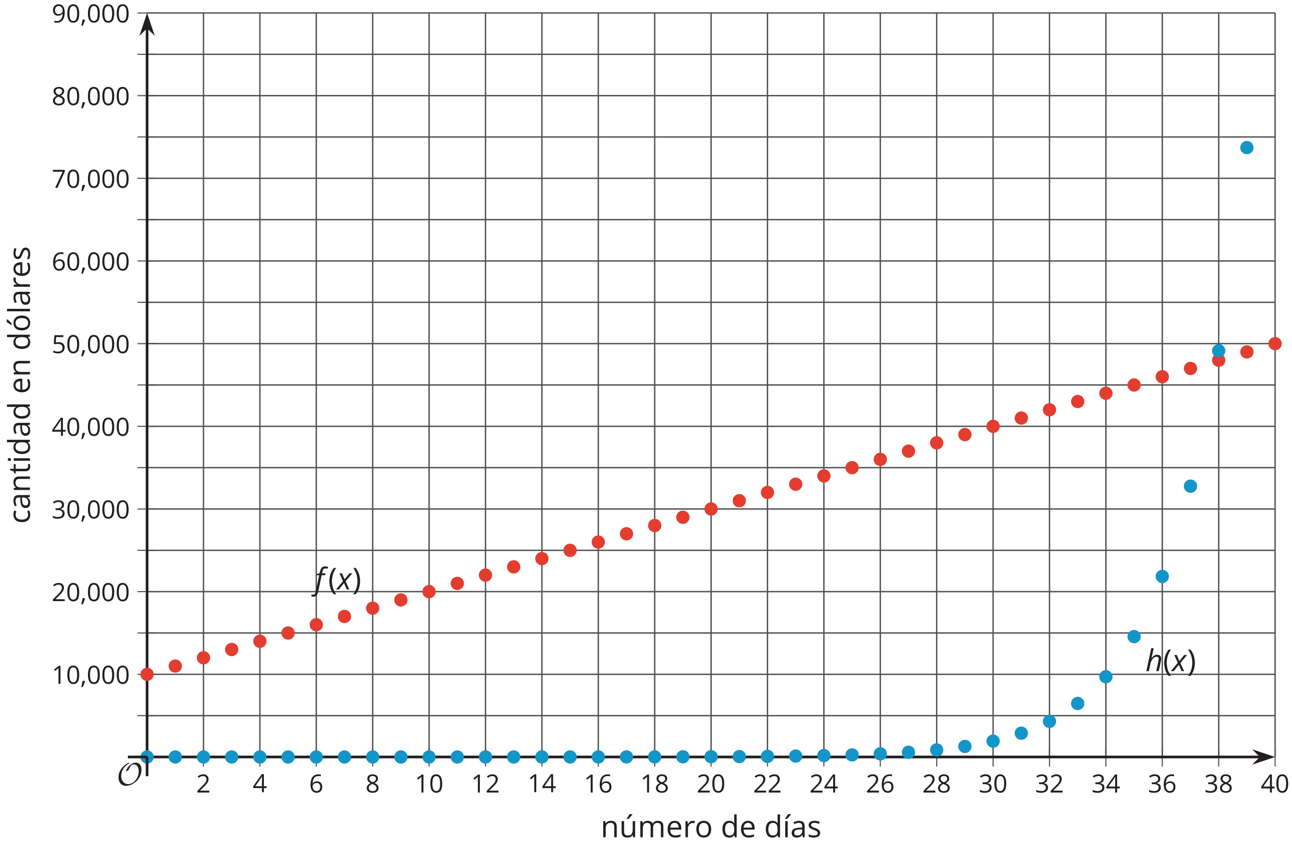
$g(1) = 0.1$
$g(2) = 1$
$g(3) = 10$
...
$g(6) = 10{,}000$
$g(7) = 100{,}000$

Durante los primeros días, la segunda opción parece mucho peor que la primera. Sin embargo, como se multiplica por 10 repetidamente, después de 7 días el dinero de la segunda opción sobrepasa al dinero de la primera opción.

¿Qué pasa si el factor de crecimiento es mucho más pequeño que 10? Supongamos que tenemos una tercera opción, que se representa con una función, h. La cantidad inicial también es \$0.01, pero en este caso crece por un factor de 1.5 cada día.

Si graficamos la función $h(x) = (0.01) \cdot (1.5)^x$, vemos que se necesitan muchos más días para ver un crecimiento rápido. Pero si se le da más tiempo para seguir creciendo, en algún momento la cantidad de esta opción exponencial superará también a la de la opción lineal. Si las reglas del premio se modifican para que ambos premios puedan crecer durante más de 38 días, esta nueva opción exponencial da más dinero que la opción lineal. Pero si los premios solo pueden crecer durante un periodo de tiempo más corto, la opción lineal da más dinero.

CC BY NC 2024
Illustrative Mathematics®



CC BY NC 2024
Illustrative Mathematics®