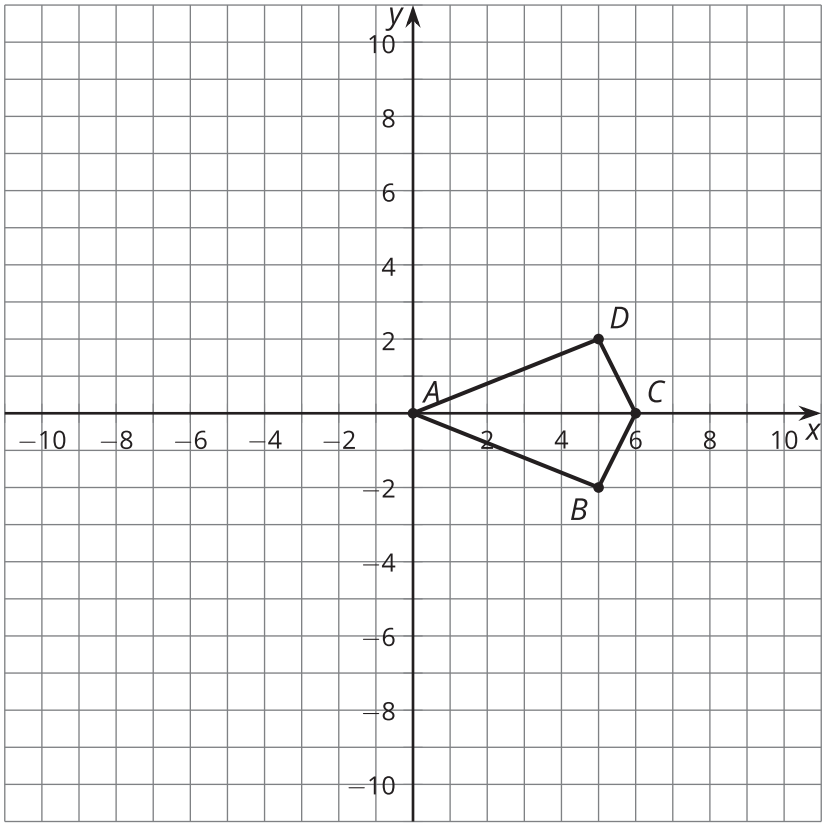
Unidad 5, Lección 6

Rectas perpendiculares en el plano

Analicemos las pendientes de rectas perpendiculares.

6.1 Retomemos las transformaciones

Este es el cuadrilátero $ABCD$.



Aplica la regla de transformación $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ al cuadrilátero $ABCD$. ¿Qué efecto tiene la regla de transformación?

6.2 Hagamos una conjetura

1. Completa la tabla con las pendientes de los segmentos del calentamiento.

	pendiente de la figura original	pendiente de la imagen	producto
AB			
BC			
CD			
DA			

2. La imagen del cuadrilátero del calentamiento se obtiene al rotar 90 grados la figura original, así que cada recta de la figura original es perpendicular a su recta correspondiente en la imagen. Usa las pendientes que calculaste para hacer una conjetura sobre las pendientes de rectas perpendiculares.

6.3 Demostrémoslo

Demostremos la conjetura que hicimos sobre las pendientes de rectas perpendiculares en el caso de rectas que pasan por el origen.

1. Encuentra la pendiente de una recta que pasa por el punto (a, b) y el origen. Supón que la recta no es ni horizontal ni vertical.

2. Supón que la recta se rota usando la regla de transformación $(x, y) \rightarrow (\text{-}y, x)$. Encuentra las coordenadas de la imagen del punto (a, b) y del origen.

3. ¿Cómo se relaciona la recta original con la imagen?

4. Encuentra la pendiente de la imagen.

5. Compara las pendientes. ¿Qué acabas de demostrar?

¿Estás listo para más?

Podemos tomar cualquier rombo $EFGH$ y trasladarlo para que la imagen de E quede en $(0, 0)$. Después, podemos rotarlo usando $(0, 0)$ como centro, de modo que al realizar estas transformaciones, la imagen de F quede en el eje x positivo en algún punto $(c, 0)$.

1. Supongamos que estas transformaciones llevan el punto H a algún punto (a, b). ¿Cuáles deben ser las coordenadas de G?

2. Para los valores de a, b y c de este problema, ¿por qué es cierto que $a^2 + b^2 = c^2$?

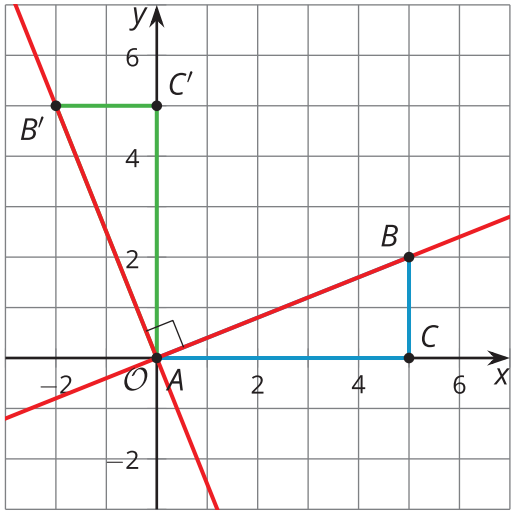
3. Demuestra que las diagonales de la imagen son perpendiculares.

4. Demuestra que las diagonales de la imagen se bisecan entre sí.

5. ¿Por qué podemos concluir que en **todos** los rombos cada diagonal es una mediatriz de la otra?

Resumen de la lección 6

El diagrama muestra el triángulo ABC y su imagen, el triángulo $AB'C'$, después de realizar una rotación de 90 grados en el sentido contrario a las manecillas del reloj usando al origen como centro.



Como la rotación fue de 90 grados, todos los segmentos de recta de la imagen son perpendiculares a sus segmentos correspondientes del triángulo original. Por ejemplo, el segmento AC es horizontal, mientras que el segmento AC' es vertical.

Examina los segmentos AB y AB', que son perpendiculares como las otras parejas de segmentos correspondientes. La pendiente del segmento AB es $\frac{2}{5}$, mientras que la pendiente del segmento AB' es $-\frac{5}{2}$. Observa la relación entre las pendientes: son recíprocas entre sí y tienen signos opuestos. El producto de las pendientes, $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$, es -1. Siempre y cuando las rectas perpendiculares no sean ni horizontales ni verticales, sus pendientes serán **recíprocas** opuestas y su producto será -1.

Podemos usar este hecho para escribir ecuaciones de rectas. Por ejemplo, intentemos escribir la ecuación de una recta que pasa por el punto $(23, -30)$ y es perpendicular a una recta, ℓ, representada por la ecuación $y = 3x + 5$. La pendiente de ℓ es 3. La pendiente de cualquier recta perpendicular a la recta ℓ es el recíproco opuesto de 3, es decir, $-\frac{1}{3}$. Al reemplazar los valores del punto $(23, -30)$ y la pendiente $-\frac{1}{3}$ en la forma punto-pendiente, obtenemos la ecuación $y - (-30) = -\frac{1}{3}(x - 23)$.