Unit 4 Family Support Materials

División de fracciones

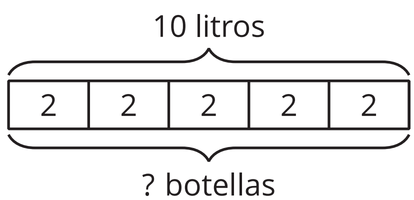
Section A: Comprendamos el sentido de la división

Esta semana, nuestros estudiantes estarán reflexionando sobre el significado de la división como preparación para aprender sobre la división de fracciones. Supongamos que tenemos 10 litros de agua que queremos dividir en grupos del mismo tamaño. Podemos pensar en la división $10 \div 2$ de dos maneras distintas (o como la respuesta a dos preguntas distintas):

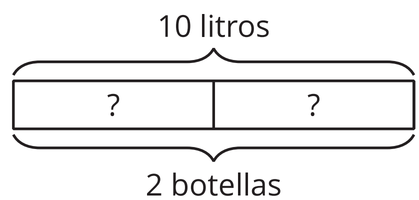
- "¿Cuántas botellas podemos llenar con 10 litros si cada botella es de 2 litros?".
- "¿Cuántos litros quedan en cada botella si dividimos 10 litros en 2 botellas?".

Estos dos diagramas muestran las dos interpretaciones de $10 \div 2$:

A



B



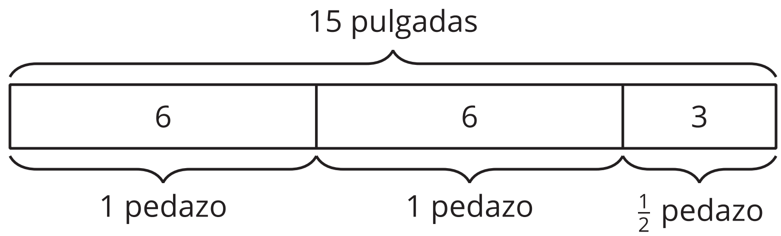
En ambos casos, la respuesta a la pregunta es 5, pero puede interpretarse de dos formas: "hay *5 botellas* con 2 litros en cada una" o "quedan *5 litros* en cada una de las 2 botellas".

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. Escriban dos preguntas distintas acerca de $15 \div 6$.
2. Estimen la respuesta: ¿es menor que 1, igual a 1 o mayor que 1? Expliquen su estimación.
3. Encuentren la respuesta a una de las preguntas que escribieron. Hacer un dibujo puede ayudarlos.

Solución:

1. Ejemplos de preguntas:
    - Una cinta de 15 pulgadas de longitud se divide en 6 pedazos iguales. ¿Qué tan largo es cada pedazo (en pulgadas)?
    - Una cinta de 15 pulgadas de longitud se divide en pedazos de 6 pulgadas cada uno. ¿Cuántos pedazos hay?
2. Mayor que 1. Ejemplos de razonamiento:
    - $12 \div 6$ es 2, por lo tanto, $15 \div 6$ debe ser mayor que 2.
    - Si dividimos 15 en 15 grupos ($15 \div 15$), obtenemos 1 (es decir, 1 en cada grupo). Entonces, si dividimos 15 en 6, que es un número más pequeño de grupos, la cantidad en cada grupo debe ser mayor que 1.
3. $2\frac{1}{2}$. Ejemplo de diagrama:



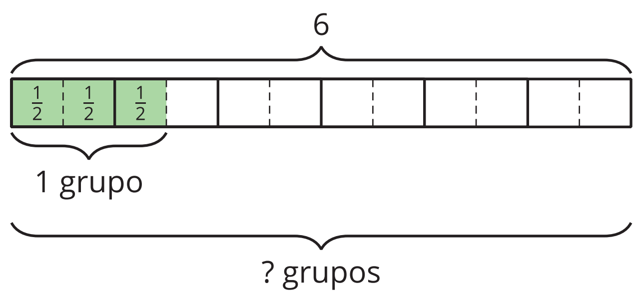
Section B: Significados de la división de fracciones

En una lección anterior, nuestros estudiantes aprendieron que divisiones como $10 \div 2 = ?$ se pueden interpretar como *"¿Cuántos grupos* de 2 hay en 10?" (es decir, cuántos grupos de 2 podemos formar con 10) o *"¿Cuánto hay en cada grupo* si hay 10 en 2 grupos del mismo tamaño?" (es decir, cuánto queda en cada grupo si repartimos 10 en 2 grupos). También aprendieron que la relación entre el 10, el 2 y el número desconocido ("?") se puede expresar con una multiplicación:

$$2 \cdot ? = 10$$
$$? \cdot 2 = 10$$

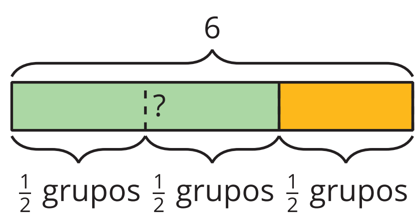
Esta semana, usarán estas mismas ideas para dividir fracciones. Por ejemplo, $6 \div 1\frac{1}{2} = ?$ se puede entender como "¿Cuántos grupos de $1\frac{1}{2}$ hay en 6?" (es decir, cuántos grupos de $1\frac{1}{2}$ podemos formar con 6). Expresar la pregunta como una multiplicación y dibujar un diagrama pueden ayudarnos a encontrar la respuesta.

$$? \cdot 1\frac{1}{2} = 6$$



En el diagrama podemos contar y ver que hay 4 grupos de $1\frac{1}{2}$ en 6.

También podemos pensar en $6 \div 1\frac{1}{2} = ?$ como "¿Cuánto hay en cada grupo si hay $1\frac{1}{2}$ grupos iguales en 6?" (es decir, cuánto habrá en cada grupo si repartimos 6 en $1\frac{1}{2}$ grupos iguales). Un diagrama también puede ser útil aquí.



A partir del diagrama vemos que hay tres $\frac{1}{2}$ grupos en 6. Esto quiere decir que hay 2 en cada $\frac{1}{2}$ grupo, o 4 en 1 grupo.

En ambos casos $6 \div 1\frac{1}{2} = 4$, pero ese 4 puede tener significados distintos, dependiendo de cómo se interprete la división.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. ¿Cuántos grupos de $\frac{2}{3}$ hay en 5? (Es decir, ¿cuántos grupos de $\frac{2}{3}$ podemos formar con 5?).
    a. Escriban una ecuación de división que represente la pregunta. Usen el signo “?” para representar la cantidad desconocida.
    b. Encuentren la respuesta. Expliquen o muestren su razonamiento.
2. Un bulto de harina pesa 4 libras. Un vendedor reparte la harina en bolsas del mismo tamaño.
    a. Escriban una pregunta en la que $4 \div \frac{2}{5} = ?$ represente esta situación.
    b. Encuentren la respuesta. Expliquen o muestren su razonamiento.

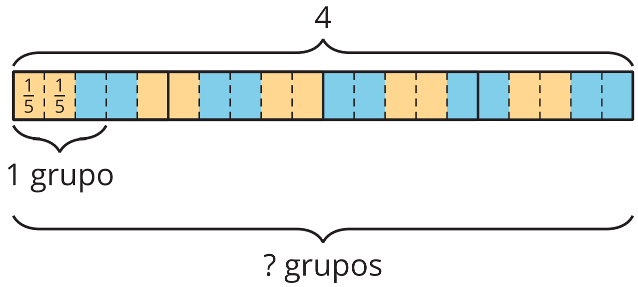
Solución:

1. a. $5 \div \frac{2}{3} = ?$

   b. $7\frac{1}{2}$. Ejemplo de razonamiento: hay 3 tercios en 1, entonces hay 15 tercios en 5. Por lo tanto, hay la mitad de 2 tercios, o $\frac{15}{2}$ dos tercios, en 5.

2. a. 4 libras de harina se dividen equitativamente en bolsas de $\frac{2}{5}$ libras cada una. ¿Cuántas bolsas habrá en total?

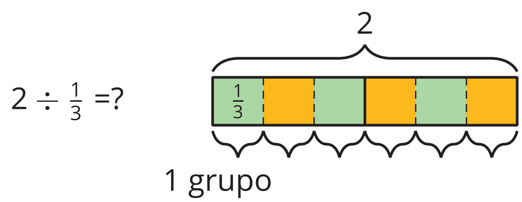
   b. 10 bolsas. Ejemplo de razonamiento: se parte cada 1 libra en quintos y luego se cuenta cuántos grupos de $\frac{2}{5}$ hay.



Section C: Algoritmo para la división de fracciones

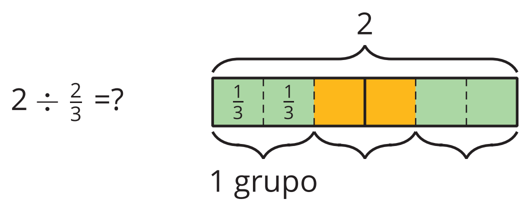
Muchas personas han aprendido que para dividir entre una fracción, “invertimos y multiplicamos”. Esta semana, nuestros estudiantes aprenderán por qué esto funciona. Para ello, van a estudiar varios enunciados de división y diagramas como estos:

- $2 \div \frac{1}{3} = ?$ se puede ver como “¿Cuántos tercios ($\frac{1}{3}$) hay en 2?”.

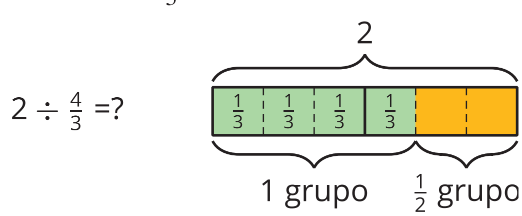
  Como hay 3 tercios en 1, hay $(2 \cdot 3)$ o 6 tercios en 2. Así que al dividir 2 entre $\frac{1}{3}$ se obtiene el mismo resultado que al multiplicar 2 por 3.

- $2 \div \frac{2}{3} = ?$ se puede ver como “¿Cuántos $\frac{2}{3}$ hay en 2?”.

  Ya sabemos que hay $(2 \cdot 3)$ o 6 tercios en 2. Para encontrar cuántos $\frac{2}{3}$ hay en 2, debemos juntar cada 2 de los tercios para formar un grupo. Al hacer esto, obtenemos la mitad de los grupos que ya teníamos. Así, $2 \div \frac{2}{3} = (2 \cdot 3) \div 2$, que es igual a 3.

- $2 \div \frac{4}{3} = ?$ puede verse como “¿Cuántos $\frac{4}{3}$ hay en 2?”.

  De nuevo, sabemos que hay $(2 \cdot 3)$ tercios en 2. Para encontrar cuántos $\frac{4}{3}$ hay en 2, debemos juntar cada 4 de los tercios para formar un grupo. Al hacer esto, obtenemos una cuarta parte de los grupos que ya teníamos (los del primer ejemplo). Así, $2 \div \frac{4}{3} = (2 \cdot 3) \div 4$, que es igual a $1\frac{1}{2}$.

Observen que cada uno de los problemas de división presentados arriba puede solucionarse multiplicando 2 por el denominador del divisor y luego dividiendo entre el numerador. Así, $2 \div \frac{a}{b}$ se puede resolver calculando $2 \cdot b \div a$, que también puede escribirse como $2 \cdot \frac{b}{a}$. En otras palabras, al dividir 2 entre $\frac{a}{b}$ se obtiene el mismo resultado que al multiplicar 2 por $\frac{b}{a}$. La fracción del divisor se "invierte" y luego se multiplica.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. Hallen cada cociente. Muestren su razonamiento.
   a. $3 \div \frac{1}{7}$
   b. $3 \div \frac{3}{7}$
   c. $3 \div \frac{6}{7}$
   d. $\frac{3}{7} \div \frac{6}{7}$
2. ¿Cuál es mayor: $\frac{9}{10} \div \frac{9}{100}$ o $\frac{12}{5} \div \frac{6}{25}$? Expliquen o muestren su razonamiento.

Solución:

1. a. 21. Ejemplo de razonamiento: $3 \div \frac{1}{7} = 3 \cdot \frac{7}{1} = 21$

   b. 7. Ejemplo de razonamiento: $3 \div \frac{3}{7} = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$

   c. $3\frac{1}{2}$. Ejemplo de razonamiento: $3 \div \frac{6}{7} = 3 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{2}$. La fracción $\frac{6}{7}$ es dos veces $\frac{3}{7}$; por lo tanto, hay la mitad de $\frac{6}{7}$ en 3 que de $\frac{3}{7}$ en 3 (es decir, la cantidad de $\frac{6}{7}$ en 3 es la mitad de la cantidad de $\frac{3}{7}$ en 3).

   d. $\frac{1}{2}$. Ejemplo de razonamiento: $\frac{3}{7} \div \frac{6}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3}{6}$

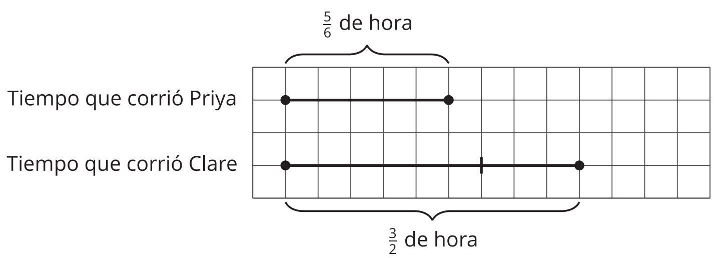
2. Tienen el mismo valor. Ambos son iguales a 10. $\frac{9}{10} \div \frac{9}{100} = \frac{9}{10} \cdot \frac{100}{9} = 10$ y $\frac{12}{5} \div \frac{6}{25} = \frac{12}{5} \cdot \frac{25}{6} = 10$.

Section D: Fracciones en longitudes, áreas y volúmenes

Durante los siguientes días, nuestros estudiantes van a resolver problemas en los que es necesario multiplicar y dividir fracciones. Algunos de esos problemas serán sobre comparación. Por ejemplo:

- Si Priya corrió durante $\frac{5}{6}$ de hora y Clare corrió durante $\frac{3}{2}$ horas, ¿qué fracción del tiempo que corrió Clare fue el tiempo que corrió Priya?

  Podemos dibujar un diagrama y escribir una ecuación de multiplicación para dar sentido a la situación.



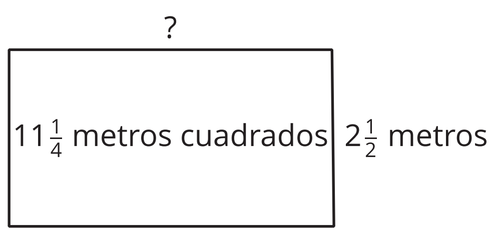
$$(\text{fracción}) \cdot (\text{tiempo de Clare}) = (\text{tiempo de Priya})$$

$$? \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

  Podemos encontrar la cantidad desconocida con una división. $\frac{5}{6} \div \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$, que es igual a $\frac{10}{18}$. Así que el tiempo que corrió Priya fue $\frac{10}{18}$, o $\frac{5}{9}$, del tiempo que corrió Clare.

Otro tipo de problemas que nuestros estudiantes van a resolver están relacionados con geometría. Van a hallar longitudes, áreas y volúmenes. Estos son algunos ejemplos:

- ¿Cuál es el largo de una habitación rectangular si su ancho es $2\frac{1}{2}$ metros y su área es $11\frac{1}{4}$ metros cuadrados?



  Sabemos que podemos encontrar el área de un rectángulo multiplicando su largo por su ancho ($? \cdot 2\frac{1}{2} = 11\frac{1}{4}$), así que si dividimos $11\frac{1}{4} \div 2\frac{1}{2}$ (o $\frac{45}{4} \div \frac{5}{2}$), obtendremos el largo de la habitación. $\frac{45}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{45}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{2}$. La habitación tiene $4\frac{1}{2}$ metros de largo.

- ¿Cuál es el volumen de una caja (un prisma rectangular) de $3\frac{1}{2}$ pies por 10 pies por $\frac{1}{4}$ de pie?

  Podemos hallar el volumen multiplicando las longitudes de los lados.

$3\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4}$, que es igual a $\frac{70}{8}$. Por lo tanto, el volumen es $\frac{70}{8}$ u $8\frac{6}{8}$ pies cúbicos.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. En el primer ejemplo sobre los tiempos que corrieron Priya y Clare, ¿cuántas veces el tiempo que corrió Priya fue el tiempo que corrió Clare? Muestren su razonamiento.
2. El área de un rectángulo es $\frac{20}{3}$ pies cuadrados. ¿Cuál es su ancho si su largo es $\frac{4}{3}$ pies? Muestren su razonamiento.

Solución:

1. $\frac{9}{5}$. Ejemplo de razonamiento: podemos escribir $? \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$ para representar la pregunta "¿Cuántas veces el tiempo que corrió Priya fue el tiempo que corrió Clare?" y luego resolverla dividiendo. $\frac{3}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{10}$. El tiempo que corrió Clare fue $\frac{18}{10}$, es decir, $\frac{9}{5}$ del tiempo que corrió Priya.
2. 5 pies. Ejemplo de razonamiento: $\frac{20}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{20}{4} = 5$