Cambios en intervalos del mismo tamaño

Exploremos cómo cambian las funciones lineales y las funciones exponenciales en intervalos del mismo tamaño.

20.1 Escribamos expresiones equivalentes

Para cada expresión, escribe una expresión equivalente que tenga la menor cantidad de términos posible.

1. $7p - 3 + 2(p + 1)$

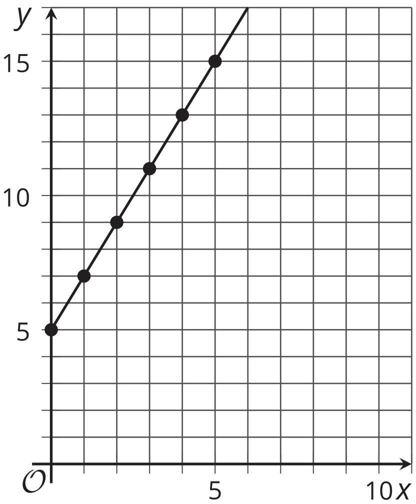
2. $[4(n + 1) + 10] - 4(n + 1)$

3. $9^5 \cdot 9^2 \cdot 9^x$

4. $\frac{2^{4n}}{2^n}$

20.2 Salidas de una función lineal

Esta es una gráfica de $y = f(x)$, donde $f(x) = 2x + 5$.



1. ¿Cómo cambian los valores de f cada vez que x aumenta 1 unidad? Por ejemplo, ¿cómo cambia cuando aumenta de 1 a 2 o de 19 a 20? Prepárate para explicar o mostrar cómo lo sabes.
2. Esta es una expresión que podemos usar para encontrar la diferencia entre los valores de f cuando la entrada cambia de x a $x + 1$.

$$[2(x+1)+5]-[2x+5]$$

¿Tiene esta expresión el mismo valor que el que encontraste en la pregunta anterior? Muestra tu razonamiento.

3. a. ¿Cómo cambian los valores de f cada vez que x aumenta 4? Explica o muestra cómo lo sabes.

   b. Escribe una expresión que muestre la diferencia entre los valores de f cuando el valor de la entrada cambia de x a $x + 4$.

   c. Muestra o explica por qué esa expresión tiene un valor de 8.

20.3 Salidas de una función exponencial

Esta tabla muestra valores de entrada y salida de una función exponencial g. La ecuación $g(x) = 3^x$ define la función.

x	$g(x)$
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2,187
8	6,561
x	
$x+1$	

1. ¿Cómo cambia $g(x)$ cada vez que x aumenta 1? Muestra o explica tu razonamiento.

2. Escoge otros dos valores de entrada que sean números enteros consecutivos y encuentra sus valores de salida. Escríbelos en la tabla. ¿Cómo cambian los valores de salida para esos dos valores de entrada?

3. Completa la tabla con la salida cuando la entrada es x y cuando la entrada es $x+1$.

4. Examina cómo cambian los valores de salida cuando x aumenta 1. ¿Aún estás de acuerdo con lo que encontraste antes? Muestra tu razonamiento.

   Haz una pausa aquí para discutir con toda la clase. Después trabaja con tu grupo en las siguientes preguntas.

5. Escoge dos valores de x. Uno de los valores debe ser 3 más que el otro (por ejemplo, 1 y 4). ¿Cómo cambian los valores de salida de g cuando x aumenta 3? (Cada miembro del grupo debe escoger un par de números distinto y analizar las salidas).

6. Completa esta tabla con la salida cuando la entrada es x y cuando es $x + 3$. Examina cómo cambian los valores de salida cuando x aumenta 3. ¿Coincide con lo que encontró tu grupo en la pregunta anterior? Muestra tu razonamiento.

x	$g(x)$
x	
$x+3$	

¿Estás listo para más?

Con los números enteros positivos, podemos pensar en la multiplicación como una suma repetida y en la potenciación como una multiplicación repetida:

$$3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \quad \text{y} \quad 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Podríamos continuar este proceso con una operación nueva llamada tetración. Para representarla, usamos el símbolo $\uparrow\uparrow$, y la definimos como una potenciación repetida:

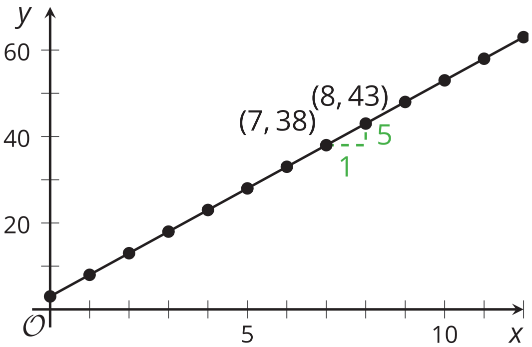
$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^{3}}}}.$$

Calcula $2 \uparrow\uparrow 3$ y $3 \uparrow\uparrow 2$. Si $f(x) = 3 \uparrow\uparrow x$, ¿cuál es la relación entre $f(x)$ y $f(x+1)$?

Resumen de la lección 20

Las funciones lineales y exponenciales se comportan cada una de una forma específica cuando su valor de entrada aumenta la misma cantidad.

Por ejemplo, consideremos la función lineal f definida por $f(x) = 5x + 3$. La gráfica de esta función tiene una pendiente de 5. Eso significa que cada vez que x aumenta 1, $f(x)$ aumenta 5. Por ejemplo, los puntos $(7, 38)$ y $(8, 43)$ están ambos en la gráfica. Cuando x aumenta 1 (de 7 a 8), y aumenta 5 (porque $43 - 38 = 5$). Podemos mostrar con álgebra que esto siempre es cierto, sin importar el valor de x.

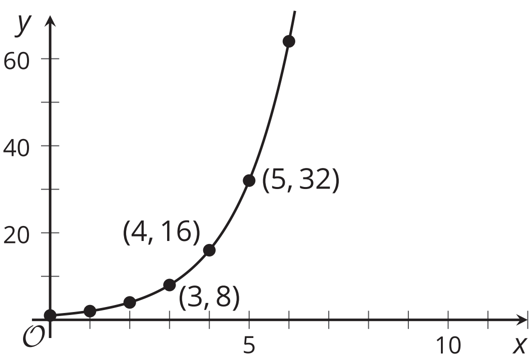


El valor de f cuando x aumenta 1 es $f(x + 1)$, que es igual a $5(x + 1) + 3$. Al restarle $f(x)$ a $f(x + 1)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= 5(x+1) + 3 - (5x + 3) \\ &= 5x + 5 + 3 - 5x - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Esto nos dice que siempre que x aumenta 1, la diferencia entre las salidas siempre es 5. En la lección, también vimos que cuando x aumenta una cantidad diferente a 1, la salida siempre aumenta la misma cantidad si la función es lineal.

Ahora analicemos la función exponencial g definida por $g(x) = 2^x$. Si graficamos g, vemos que cada vez que x aumenta 1, el valor de $g(x)$ se duplica. Podemos mostrar que esto siempre es cierto, sin importar el valor de x, con álgebra.



El valor de g cuando x aumenta 1 es $g(x + 1)$, que es igual a 2^{x+1}. Al dividir $g(x + 1)$ entre $g(x)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{g(x+1)}{g(x)} &= \frac{2^{(x+1)}}{2^x} \\ &= 2^{x+1-x} \\ &= 2^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Esto significa que siempre que x aumenta 1, el valor de g siempre se multiplica por 2. En la lección, también vimos que cuando x aumenta una cantidad diferente a 1, la salida siempre aumenta por el mismo factor si la función es exponencial.

Una función lineal siempre aumenta (o disminuye) la misma cantidad en intervalos del mismo tamaño. Una función exponencial aumenta (o disminuye) por factores iguales en intervalos del mismo tamaño.