Triángulos congruentes (parte 1)

Usemos transformaciones rígidas para asegurarnos de que dos triángulos son congruentes.

3.1 ¿Verdadero o... a veces verdadero? Triángulos

Si el triángulo ABC es congruente al triángulo $A'B'C'$ ...

1. ¿Qué debe ser verdad?

2. ¿Qué podría ser verdad?

3. ¿Qué, definitivamente, no puede ser verdad?

3.2 Los triángulos invisibles

Jugador 1: Eres el trasformador. Toma la tarjeta de transformador.

Jugador 2: Selecciona una tarjeta de triángulo (tarjeta A, B o C). No se la muestres a nadie. Estudia el diagrama y descifra qué lados corresponden y qué ángulos corresponden. Cuéntale al jugador 1 lo que encontraste.

Jugador 1: Anota lo que te dice tu compañero para saber qué partes de sus triángulos son correspondientes. Piensa en una secuencia de movimientos rígidos que lleve un triángulo al otro y compártela con tu compañero. Usa un lenguaje específico. Si te ayuda, usa las notas de tu tarjeta.

Jugador 2: Escucha las instrucciones del transformador. Sigue sus instrucciones en papel de calcar. Dibuja la imagen que se obtiene luego de cada paso. Cuéntale a tu compañero cada vez que haga coincidir 1, 2 o 3 vértices de tus triángulos.

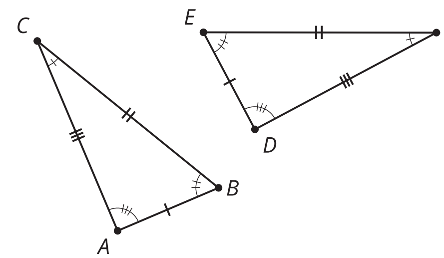
¿Estás listo para más?

Vuelvan a jugar “Los triángulos invisibles”, pero esta vez el trasformador solo puede usar reflexiones (es decir, las dos últimas oraciones para completar de la tarjeta de transformador). Te puede ayudar incluir esta nueva oración: Refleja _____ con respecto a la bisectriz del ángulo _____.

3.3 ¿Por qué coinciden?

Noah y Priya estaban jugando “Los triángulos invisibles”. Priya le dijo a Noah todos los lados que eran congruentes y todos los ángulos que eran congruentes.

$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{CA} \cong \overline{FD}, \angle C \cong \angle F, \angle B \cong \angle E, \angle A \cong \angle D$



Noah le dijo a Priya que hiciera estos pasos para que los 3 vértices coincidieran:

- Trasladar el triángulo ABC usando el segmento de recta dirigido que va de A a D.
- Rotar la imagen (el triángulo $A'B'C'$) usando D como centro de manera que los rayos $A''B''$ y DE coincidan.
- Reflejar la imagen (el triángulo $A''B''C''$) con respecto a la recta DE.

Ahora Noah y Priya están tratando de explicar por qué sus instrucciones funcionan y necesitan ayuda. Responde a sus preguntas para ayudarlos a completar las partes que faltan en su demostración.

Primero, trasladamos el triángulo ABC usando el segmento de recta dirigido que va de A a D. El punto A' va a coincidir con D porque así definimos esa transformación. Luego, tomamos la imagen (el triángulo $A'B'C'$) y la rotamos el ángulo $B'DE$ de manera que los rayos $A''B''$ y DE coincidan. El punto B'' va a coincidir con el punto E porque ________. Por último, tomamos la imagen (el triángulo $A''B''C''$) y la reflejamos con respecto a DE. El rayo $A''C''$ y el rayo DF van a coincidir porque ________. El punto C'' y el punto F van a coincidir porque ________. Como los 3 vértices de los triángulos coinciden, esta secuencia de transformaciones lleva el triángulo ABC al triángulo DEF.

1. Sabemos que los rayos $A''B''$ y DE coinciden porque dijimos que debían coincidir, pero ¿por qué los puntos B'' y E deben quedar exactamente en el mismo lugar?

2. ¿Cómo sabemos ahora que la imagen del rayo $A''C''$ va a coincidir con el rayo DF?

3. ¿Cómo sabemos que la imagen del punto C'' va a coincidir exactamente con el punto F?

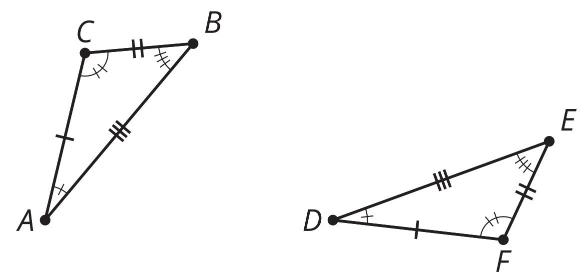
Resumen de la lección 3

Si todas las partes correspondientes de dos triángulos son congruentes, entonces un triángulo se puede llevar al otro con una secuencia de traslaciones, rotaciones y reflexiones. La congruencia de las partes correspondientes justifica que los vértices de los triángulos coincidan exactamente.

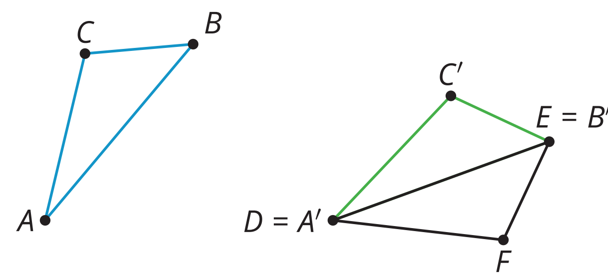
Una de las formas más comunes de hacer coincidir los vértices es primero usar una traslación para que un par de vértices coincida, luego una rotación para que un segundo par coincida, y, si es necesario, una reflexión para que el tercer par coincida. Hay varias maneras de justificar por qué los vértices deben coincidir si los triángulos son congruentes. Esta es una de ellas:

Primero, trasladamos el triángulo ABC usando el segmento de recta dirigido que va de A a D. ¡Los puntos A y D coinciden porque así definimos la traslación! Luego, rotamos la imagen del triángulo ABC usando D como centro, de manera que los rayos $A'B'$ y DE coincidan.

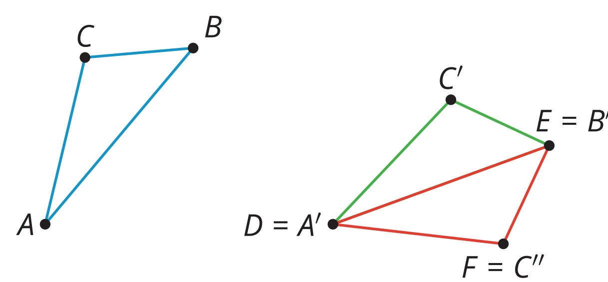
$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF},$
$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$



Sabemos que los rayos $A'B'$ y DE coinciden porque así definimos la rotación. La distancia AB es igual a la distancia DE, porque las traslaciones y las rotaciones no cambian las distancias. Como los puntos B' y E están sobre el mismo rayo y a la misma distancia de D, deben estar en el mismo lugar.



Si es necesario, reflejamos el triángulo $A'B'C'$ con respecto a la recta DE de manera que la imagen de C' quede del mismo lado de DE que F. Sabemos que el ángulo A es congruente al ángulo D porque las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones no cambian las medidas de los ángulos.



C'' debe estar sobre el rayo DF porque C'' y F están del mismo lado de DE y forman el mismo ángulo con DE en D. Sabemos que la distancia AC es igual a la distancia DF, lo que implica que la distancia entre C'' y A'' es igual a la distancia entre F y D (porque las traslaciones y las rotaciones no cambian las distancias). Como F y C'' están sobre el mismo rayo y a la misma distancia de D, deben estar en el mismo lugar.

