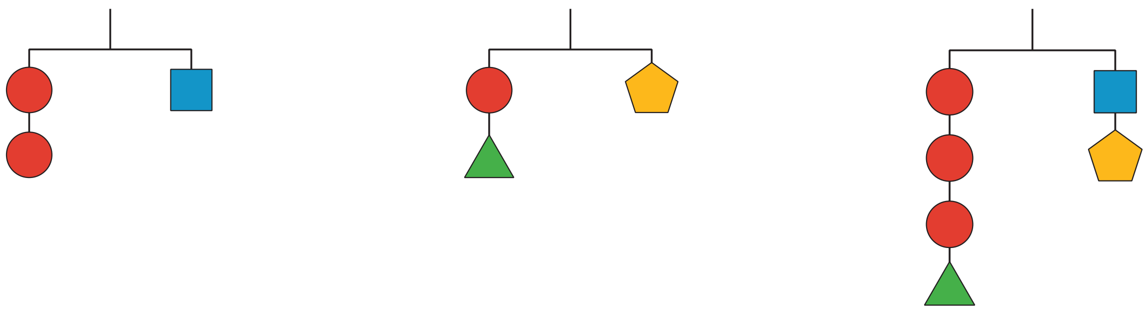
Solucionemos sistemas con el método de eliminación (parte 1)

Investiguemos cómo sumar o restar ecuaciones nos puede ayudar a solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

14.1 Observa y pregúntate: Diagramas de colgador

¿Qué observas? ¿Qué te preguntas?



14.2 Sumemos ecuaciones

Diego soluciona este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -4x + 5y = 6 \end{cases}$$

Esto es lo que él hizo:

$$\begin{array}{rl} 4x + 3y = & 10 \\ -4x + 5y = & 6 \quad + \\ \hline 0 + 8y = & 16 \\ y = & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4x + 3(2) &= 10 \\ 4x + 6 &= 10 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

1. Analiza lo que Diego hizo y discute con un compañero:
   a. ¿Qué hizo Diego para solucionar el sistema?
   b. ¿Es el par de valores de x y y que Diego encontró realmente una solución al sistema? ¿Cómo lo sabes?

2. ¿El método de Diego funciona para solucionar estos sistemas? Prepárate para explicar o mostrar tu razonamiento.
   a. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 11 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 8x + 11y = 37 \\ 8x + y = 7 \end{cases}$

14.3 Sumemos y restemos ecuaciones para solucionar sistemas

Estos son tres sistemas de ecuaciones que viste antes.

Sistema A

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ \text{-}4x + 5y = 6 \end{cases}$$

Sistema B

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

Sistema C

$$\begin{cases} 8x + 11y = 37 \\ 8x + y = 7 \end{cases}$$

1. Para cada sistema:
    a. Usa tecnología para graficar las dos ecuaciones del sistema. Después, identifica las coordenadas de la solución.
    b. Encuentra la suma o la diferencia de las dos ecuaciones que permitiría solucionar el sistema.
2. ¿Qué observas acerca de la gráfica de la tercera ecuación que escribiste para cada sistema? Haz una conjetura sobre por qué la gráfica de la suma o de la diferencia se relaciona de esa manera con la gráfica de las ecuaciones del sistema.

¿Estás listo para más?

Mai se pregunta qué pasaría si multiplicamos las ecuaciones. Es decir, si multiplicamos las expresiones del lado izquierdo de las dos ecuaciones y las igualamos al producto de las expresiones del lado derecho.

1. Para el sistema B, escribe la ecuación que obtendrías si multiplicas las dos ecuaciones de esta manera.

2. ¿La solución original es una solución de esta ecuación nueva?

3. Usa tecnología para graficar esta ecuación nueva en el mismo plano de coordenadas. ¿Por qué esta estrategia no es muy útil?

Resumen de la lección 14

Otra forma de solucionar sistemas de ecuaciones con álgebra es el **método de eliminación**. Al igual que con el método de sustitución, la idea es eliminar una variable para que podamos despejar la otra. Esto se hace sumando o restando ecuaciones del sistema. Veamos un ejemplo.

$$\begin{cases} 5x + 7y = 64 \\ 0.5x - 7y = \text{-}9 \end{cases}$$

Observa que una ecuación tiene $7y$ y la otra tiene $\text{-}7y$.

Si le sumamos la segunda ecuación a la primera, $7y$ y $\text{-}7y$ suman 0. Esto elimina la variable y y nos permite encontrar el valor de x.

$$\begin{array}{rl} 5x + 7y = 64 & \\ 0.5x - 7y = \text{-}9 & + \\ \hline 5.5x + 0 = 55 & \\ 5.5x = 55 & \\ x = 10 & \end{array}$$

Ahora que sabemos que $x = 10$, podemos reemplazar x por 10 en cualquiera de las ecuaciones y encontrar el valor de y:

$$\begin{aligned} 5x + 7y &= 64 \\ 5(10) + 7y &= 64 \\ 50 + 7y &= 64 \\ 7y &= 14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.5x - 7y &= \text{-}9 \\ 0.5(10) - 7y &= \text{-}9 \\ 5 - 7y &= \text{-}9 \\ \text{-}7y &= \text{-}14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

En este sistema, el coeficiente de y en la primera ecuación es el opuesto del coeficiente de y en la segunda ecuación. La suma de los términos que tienen la variable y es 0.

¿Qué ocurre si las ecuaciones no tienen coeficientes opuestos para la misma variable, como en el siguiente sistema?

$$\begin{cases} 8r + 4s = 12 \\ 8r + s = \text{-}3 \end{cases}$$

Observa que $8r$ está en ambas ecuaciones. Podemos eliminar la variable r si le restamos la segunda ecuación a la primera, porque $8r - 8r$ es 0.

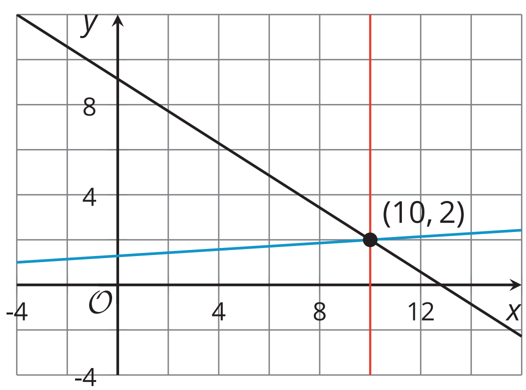
$$\begin{array}{rl} 8r + 4s = 12 & \\ 8r + s = \text{-}3 & - \\ \hline 0 + 3s = 15 & \\ 3s = 15 & \\ s = 5 & \end{array}$$

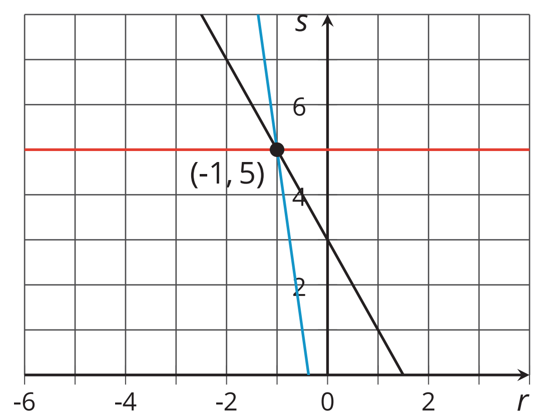
Si reemplazamos s por 5 en una de las ecuaciones, obtenemos una ecuación que nos permite encontrar el valor de r:

$$\begin{aligned} 8r + 4s &= 12 \\ 8r + 4(5) &= 12 \\ 8r + 20 &= 12 \\ 8r &= \text{-}8 \\ r &= \text{-}1 \end{aligned}$$

Cuando sumamos o restamos ecuaciones de un sistema, se crea una ecuación nueva. Pero ¿cómo sabemos que la ecuación nueva comparte una solución con el sistema original?

Si graficamos las ecuaciones originales del sistema y la ecuación nueva, vamos a ver que las tres rectas se intersecan en el mismo punto. ¿Por qué ocurre esto?





En lecciones futuras, investigaremos por qué esta estrategia funciona.