Usemos exponentes negativos

Exploremos más de cerca las gráficas exponenciales y las ecuaciones exponenciales.

7.1 Propiedades de los exponentes

Reescribe cada expresión como una expresión equivalente que solo tenga un exponente.

- $2^4 \cdot 2^0$
- $2^4 \cdot 2^{-1}$
- $2^4 \cdot 2^{-3}$
- $2^4 \cdot 2^{-4}$

7.2 Coral marino

Un biólogo marino estima que una estructura de coral tiene un volumen de 1,200 centímetros cúbicos y que su volumen se duplica cada año.



1. Escribe una ecuación de la forma $y = a \cdot b^t$ que represente esta relación, donde t sea el tiempo en años después de que se estimó el volumen del coral y y sea el volumen del coral en centímetros cúbicos. (Debes descubrir cuáles son los números a y b en esta situación).

2. Encuentra el volumen del coral cuando t es 5, 1, 0, -1 y -2.

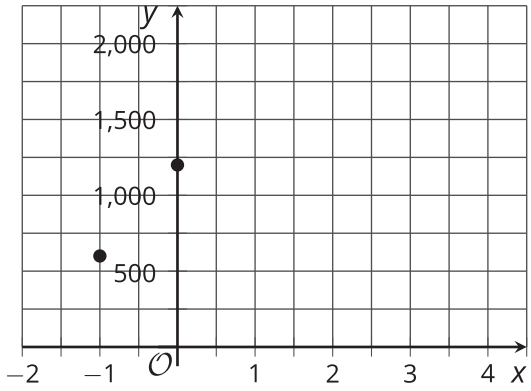
3. En esta situación, ¿qué significa decir que t es -2?

4. En cierto año, se estima que el volumen del coral es 37.5 centímetros cúbicos. ¿Qué año es? Explica tu razonamiento.

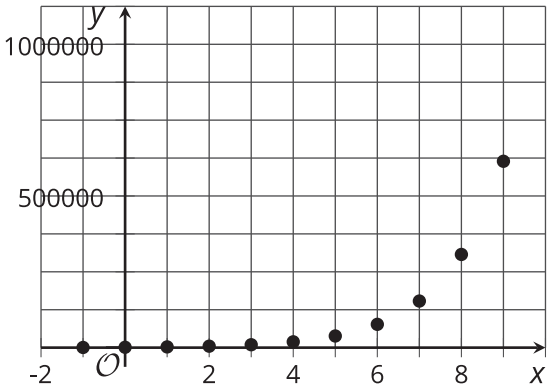
7.3 Rectángulos de vista de unas gráficas

El volumen, y, de una estructura de coral en centímetros cúbicos se modela con la ecuación $y = 1{,}200 \cdot 2^x$, donde x es el número de años después de que se midió el coral. Tres estudiantes usaron tecnología para graficar la ecuación que representa el volumen del coral como función del tiempo.

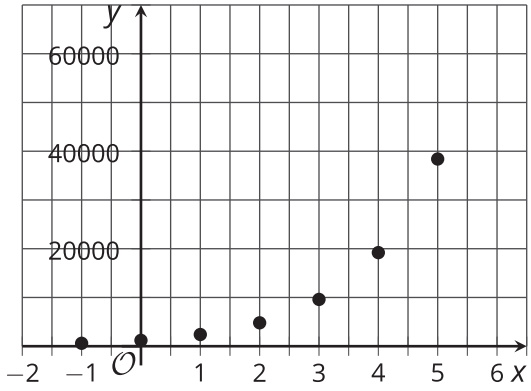
A



B



C



Para cada gráfica:

1. Describe qué tan bien o qué tan mal se ve el comportamiento de la función en el rectángulo de vista.

2. Para cada rectángulo de vista que creas que no muestra bien el comportamiento de la función, describe cómo ajustarías el rectángulo de vista.

3. Con tecnología, vuelve a hacer las gráficas con los ajustes que sugeriste.

7.4 Población de un pueblo fantasma

La población de un pueblo disminuyó exponencialmente desde finales de 1800 hasta mediados de 1900, cuando los últimos residentes abandonaron el pueblo y lo convirtieron en un pueblo fantasma.

1. a. En la tabla, se muestra la población del pueblo, p, para cierto número de años desde 1900, t. ¿Cuál es el factor de crecimiento? Es decir, ¿cuál es el valor de b en una ecuación de la forma $p = a \cdot b^t$? ¿Cuál es el valor de a?

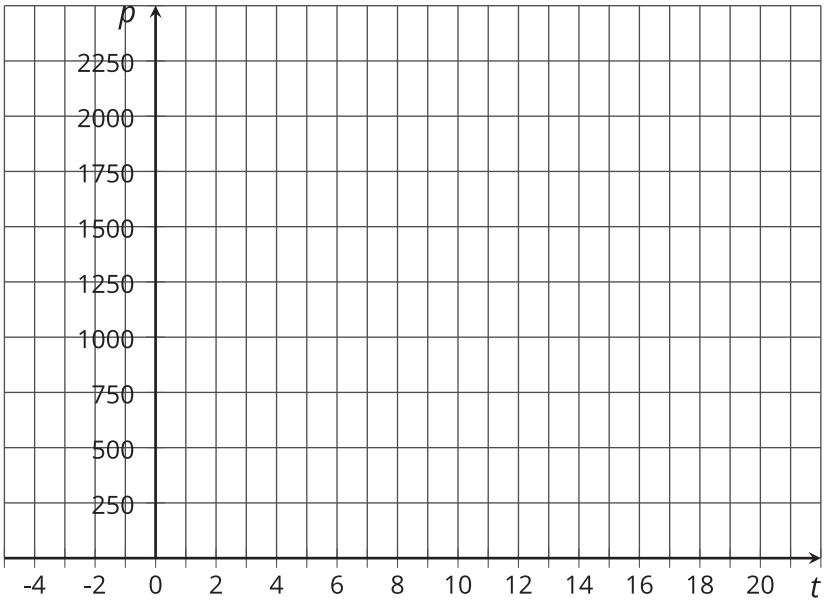
   b. Encuentra la población del pueblo cuando t es -1 y -3. Anótalos en la tabla.

t, años desde 1900	p, población
0	1,500
1	1,350
2	1,215

2. ¿Qué significan $t = 0$, $t = -1$ y $t = -3$ en esta situación?

3. En 1895 el pueblo alcanzó su mayor población. ¿Cuál era la población en 1895? Explica tu razonamiento.

4. Ubica los puntos cuyas coordenadas se muestran en la tabla.



5. Teniendo en cuenta tu gráfica:

   a. ¿En qué año el pueblo tenía aproximadamente 2,000 personas?

   b. ¿Cuál era la población en 1905?

¿Estás listo para más?

Sin evaluarlas, describe cada una de estas cantidades como “cercana a 0”, “cercana a 1” o “mucho mayor que 1”.

$$\frac{1}{1-2^{-10}} \qquad \frac{2^{10}}{2^{10}+1} \qquad \frac{2^{-10}}{2^{10}+1} \qquad \frac{1-2^{-10}}{2^{10}} \qquad \frac{1+2^{10}}{2^{-10}}$$

Resumen de la lección 7

Las ecuaciones son útiles no solo para representar relaciones que cambian exponencialmente, sino también para responder preguntas acerca de estas situaciones.

Supongamos que una población de 1,000,000 de bacterias está aumentando por un factor de 2 cada hora. ¿Cuál era el tamaño de la población hace 5 horas? ¿Hace cuántas horas la población era menor que 1,000?

Podríamos trabajar hacia atrás y calcular la población de bacterias 1 hora antes, 2 horas antes, y así sucesivamente. Por ejemplo, si la población se duplica cada hora y era de 1,000,000 cuando se observó por primera vez, una hora antes la población debe haber sido 500,000, dos horas antes debe haber sido 250,000, y así sucesivamente.

Otra forma de razonar sobre estas preguntas consiste en representar la situación con una ecuación. Si t mide el tiempo en horas que han pasado desde que la población era 1,000,000, entonces la población de bacterias se puede describir con esta ecuación:

$$p = 1{,}000{,}000 \cdot 2^t$$

La población es 1,000,000 cuando t es 0, así que 5 horas antes, t sería -5. Podemos calcular la población de esta manera:

$$\begin{aligned} 1{,}000{,}000 \cdot 2^{-5} &= 1{,}000{,}000 \cdot \frac{1}{2^5} \\ &= 1{,}000{,}000 \cdot \frac{1}{32} \\ &= 31{,}250 \end{aligned}$$

Del mismo modo, si reemplazamos t por -10 obtenemos $1{,}000{,}000 \cdot 2^{-10}$ o $1{,}000{,}000 \cdot \frac{1}{2^{10}}$, que es un poco menos de 1,000. Esto significa que 10 horas antes de la medición inicial, la población de bacterias era menor que 1,000.