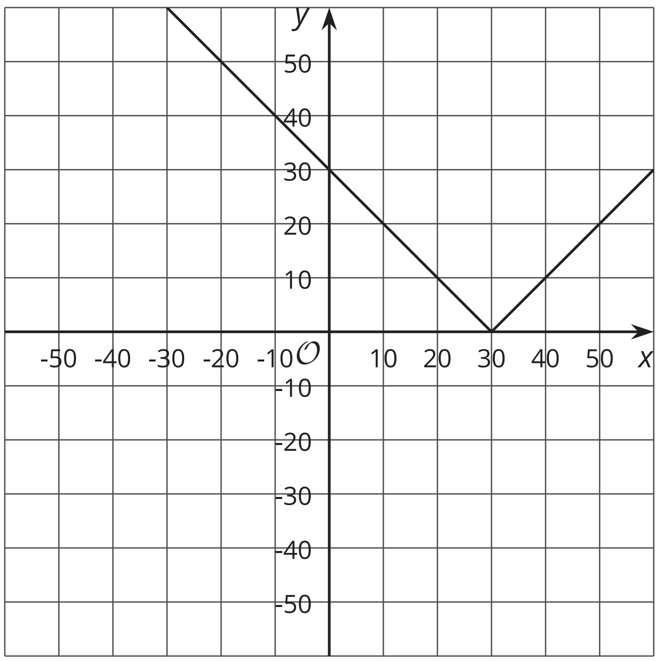
Resolvamos ecuaciones con valores absolutos

Resolvamos ecuaciones con valores absolutos.

15.1 ¿Dónde va el 30?



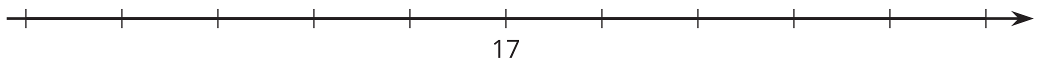
1. ¿Cuál de estas funciones representa esta gráfica? Explica tu razonamiento.
    - $f(x) = |x + 30|$
    - $g(x) = |x - 30|$
    - $h(x) = |x| + 30$
    - $j(x) = |x| - 30$
2. Una de estas funciones toma una estimación como entrada, x, y da como salida la distancia entre la estimación y 30. ¿Cuál función es? Explica tu razonamiento.
3. Escribe una función que tome una estimación como entrada y dé como salida la distancia entre la estimación y -8.

CC BY NC 2024 Illustrative Mathematics®

15.2 Usemos la distancia para resolver ecuaciones con valores absolutos

1. $|x - 17| = 3$

   ¿Qué valores de x hacen que la ecuación sea verdadera? Explica o muestra tu razonamiento.

2. $|12 - t| = 3$. ¿Qué valores de t hacen que la ecuación sea verdadera? Explica o muestra tu razonamiento.

3. Escribe una ecuación en la que se use valor absoluto y que represente todos los números que están exactamente a una distancia de 4 del número 12.

¿Estás listo para más?

1. En una recta numérica, ¿qué número está exactamente en el medio de los números 34 y 86? Explica o muestra tu razonamiento.

2. ¿Cómo puedes usar ese valor para escribir una ecuación con valor absoluto cuyas soluciones sean 34 y 86? Explica o muestra tu razonamiento.

 CC BY NC 2024
Illustrative Mathematics®

15.3 Usemos casos para resolver ecuaciones con valores absolutos

Para resolver la ecuación $2|x-47|+5=9$, Andre primero deja el valor absoluto a un lado de la ecuación.

$2|x-47|=4$

$|x-47|=2$

Después, él usa la definición a trozos del valor absoluto para partir la ecuación en dos casos.

- Si $x \geq 47$, entonces $|x-47|=(x-47)$, por lo tanto la ecuación queda $x-47=2$ y la solución es $x=49$. Esto cumple con la condición inicial porque $49 \geq 47$.
- Si $x < 47$, entonces $|x-47|=\text{-}(x-47)$, por lo tanto la ecuación queda $\text{-}(x-47)=2$ y la solución es $x=45$. Esto cumple con la condición inicial porque $45 < 47$.

Resuelve una de estas ecuaciones con el método de casos de Andre. Resuelve otra ecuación razonando sobre las distancias en una recta numérica. Resuelve las otras 2 ecuaciones con cualquiera de los dos métodos.

1. $|x-16|=20$
2. $|x+9|+2=4$
3. $|7-x|=9$
4. $|x-4|=\frac{1}{2}$

¿Estás listo para más?

Usa el método de Andre para resolver estas ecuaciones. ¿Cómo puedes explicar las respuestas en términos de la distancia con respecto a un número?

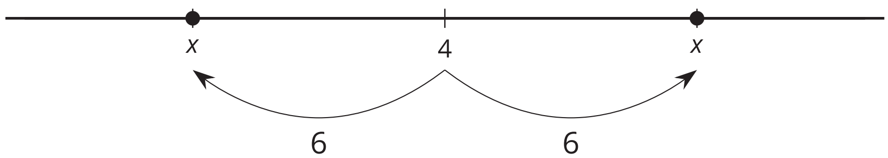
1. $|2x-3|=5$

2. $2|x-1|=10$

Resumen de la lección 15

La afirmación $|3-5|=2$ es verdadera y se puede interpretar como “La distancia entre 3 y 5 es 2”. Por esta razón también es verdadero escribir $|5-3|=2$.

Esta idea también se puede usar para resolver ecuaciones en las que se conoce la distancia a un punto. Por ejemplo, $|x-4|=6$ nos dice que la distancia entre x y 4 es 6. En una recta numérica, se vería así.



¿Qué valores de x hacen que esta afirmación sea verdadera? Tanto $x=\text{-}2$ como $x=10$ hacen que la ecuación con valor absoluto sea verdadera, así que son soluciones de la ecuación.

Otra forma de resolver una ecuación con valor absoluto es analizarla por trozos.

$$|x-a|=\begin{cases}(x-a), & x\geq a\\ \text{-}(x-a), & x<a\end{cases}$$

Podemos tomar la ecuación $|x-4|=6$ y partirla en dos casos.

- Si $x\geq 4$, entonces la ecuación es $(x-4)=6$. Para resolverla, podemos usar lo que sabemos sobre ecuaciones lineales. Si sumamos 4 a cada lado, podemos reescribir la ecuación como $x=10$. Comprobamos que está bien porque el caso parte de “Si $x\geq 4$…” y al final obtenemos un valor de x que es mayor o igual a 4.
- Si $x<4$, entonces la ecuación es $\text{-}(x-4)=6$. Podemos distribuir el -1 del lado izquierdo y obtenemos $\text{-}x+4=6$. Ahora podemos restar 4 a cada lado y multiplicar cada lado del resultado por -1, y obtenemos $x=\text{-}2$. También comprobamos que está bien porque el caso parte de “Si $x<4$…” y al final obtenemos un valor de x que es menor que 4.

Al juntar los resultados de los casos, de nuevo obtenemos que las soluciones son -2 y 10.

Ya sea que prefieras razonar acerca de las distancias en una recta numérica o usar la definición a trozos para escribir la ecuación que corresponde a cada caso, las soluciones deben ser iguales.

 CC BY NC 2024
Illustrative Mathematics®