Unidad 9, Lección 18

Expresadas de distintas formas

Escribamos expresiones exponenciales de distintas formas.

18.1 Conversación matemática: Expresiones iguales

Decide si cada expresión es igual a $(1.21)^{100}$.

- $\left((1.21)^{10}\right)^{10}$

- $\left((1.21)^{50}\right)^{50}$

- $\left((1.1)^{2}\right)^{100}$

- $(1.1)^{200}$

18.2 Predicciones de la población

1. La población de los Estados Unidos, en miles, entre los años 1790 y 1860, se puede modelar con la ecuación $P = 4{,}000 \cdot (1.031)^t$, donde t es el número de años después de 1790.
   a. Aproximadamente, ¿cuántas personas vivían en los Estados Unidos en el año 1790?, ¿y en el año 1860? Muestra tu razonamiento.

   b. Aproximadamente, ¿cuál es el aumento porcentual anual que predice el modelo?

   c. Según el modelo, ¿cuál será la población en el año 2017? ¿Es buena esta predicción? Explica.

2. a. ¿Qué aumento porcentual predice el modelo para una década? Explica.

   b. Supongamos que d representa el número de *décadas* después de 1790. Escribe una ecuación de P en términos de d que modele la población de los Estados Unidos (en miles).

3. a. ¿Qué aumento porcentual predice el modelo para un siglo? Explica.

   b. Supongamos que c representa el número de siglos después de 1790. Escribe una ecuación de P en términos de c que modele la población de los Estados Unidos (en miles).

18.3 Cálculos de intereses

Estas son tres expresiones y tres descripciones. En cada caso, se han depositado $1,000 en una cuenta bancaria que genera intereses. No se hacen retiros ni depósitos (aparte de los intereses ganados) durante 6 años.

- $1{,}000 \cdot \left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{72}$
- $1{,}000 \cdot \left(1 + \frac{0.07}{2}\right)^{12}$
- $1{,}000 \cdot \left(\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{12}\right)^{6}$

- interés anual del 7% capitalizado semestralmente
- interés anual del 7% capitalizado mensualmente
- interés anual del 7% capitalizado cada dos meses

Agrupa las expresiones y descripciones que representan la misma cantidad de intereses al cabo de 6 años. Uno de los grupos tiene más de una expresión. Una de las descripciones no tiene correspondencias. Escribe una expresión que le corresponda.

¿Estás listo para más?

Al invertir $1,000 durante 6 años a una tasa de interés anual del 5%, capitalizada cada dos meses, se obtienen $1,348.18. Sin hacer ningún cálculo, ordena estos cuatro posibles cambios según el aumento de los intereses que producirían, del mayor aumento al menor aumento:

- Aumentar en $100 la cantidad inicial.
- Aumentar en 1% la tasa de interés.
- Dejar que el dinero en la cuenta aumente durante un año más.
- Capitalizar el interés cada mes en vez de cada dos meses.

Después de que hayas hecho tus predicciones, calcula el valor de cada opción para ver si las ordenaste correctamente.

Resumen de la lección 18

Las expresiones se pueden escribir de distintas formas para destacar ciertos aspectos de una situación o para ayudarnos a entender mejor lo que sucede. Una **tasa de crecimiento** nos da el cambio porcentual. Como siempre, en situaciones de cambios porcentuales, es importante saber si el cambio es un aumento o una disminución. Por ejemplo:

- Una población aumenta en 20% cada año. La tasa de crecimiento es 20%, por lo que después de un año, se suma 0.2 veces la población que había al principio de ese año. Si la población inicial es p, la población el siguiente año es $p + 0.2p$, que es igual a $(1 + 0.2)p$ o $1.2p$.
- Una población disminuye en 20% cada año. La tasa de crecimiento es -20%, así que después de un año, se pierde 0.2 veces la población que había al principio de ese año. Si la población inicial es p, la población el siguiente año es $p – 0.2p$, que es igual a $(1 – 0.2)p$ o $0.8p$.

Supongamos que el área, a, que está cubierta por un bosque es actualmente de 50 millas cuadradas y crece en 0.2% cada año. Si t representa el tiempo en años, medido desde ahora, podemos expresar el área del bosque como:

$$a = 50 \cdot (1 + 0.002)^t$$

$$a = 50 \cdot (1.002)^t$$

En esta situación, la *tasa de crecimiento* es 0.002 y el factor de crecimiento es 1.002. Sin embargo, dado que 0.002 es un número tan pequeño, puede que sea difícil entender a partir de esta función qué tan rápido está creciendo el bosque. Nos puede dar más información medir el crecimiento cada década o cada siglo. Hay 10 años en una década, así que para encontrar la tasa de crecimiento en décadas, podemos usar la expresión $(1.002)^{10}$, que es aproximadamente 1.02. Es decir, la tasa de crecimiento es aproximadamente 2% por década. Si usamos d para medir el tiempo en décadas, el área del bosque se puede expresar como:

$$a = 50 \cdot \left((1 + 0.002)^{10}\right)^d$$

$$a \approx 50 \cdot (1.02)^d$$

Si medimos el tiempo en siglos, la tasa de crecimiento es aproximadamente 22% por siglo porque $1.002^{100} \approx 1.22$. Si usamos c para medir el tiempo en siglos, nuestra ecuación del área se vuelve:

$$a = 50 \cdot \left((1 + 0.002)^{100}\right)^c$$

$$a \approx 50 \cdot (1.22)^c$$