Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Descubramos cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones.

17.1 Un sistema curioso

Andre intenta solucionar este sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x = 20 - 4y \end{cases}$

Al mirar la primera ecuación, él piensa: "La solución del sistema es un par de números que suman 5. Me pregunto cuáles son esos dos números".

1. Escoge cualquier par de números que sumen 5. Llama x al primer número y y al segundo.
2. El par de valores que escogiste es una solución de la primera ecuación. Revisa si este par de valores también es una solución de la segunda ecuación. Después, haz una pausa para una discusión breve con toda la clase.
3. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Usa lo que sabes sobre ecuaciones o sobre cómo solucionar sistemas para mostrar que tienes razón.

17.2 ¿Cuál es la oferta?

Un centro recreativo establece precios de oferta en sus boletos para piscina y sus membresías para el uso del gimnasio durante el verano. El primer día de la oferta, una familia paga \$96 por 4 boletos para piscina y 2 membresías de gimnasio. Más tarde, ese mismo día, una mujer compra un boleto para piscina para ella y otro para una amiga, y una membresía de gimnasio. La mujer paga \$72.

1. Escribe un sistema de ecuaciones que represente la relación entre los boletos para piscina, las membresías de gimnasio y los costos. Asegúrate de especificar lo que representa cada variable.

2. Encuentra el costo de un boleto para piscina y el costo de una membresía de gimnasio solucionando el sistema algebraicamente. Explica o muestra tu razonamiento.

3. Usa tecnología para graficar las ecuaciones del sistema. Haz 1 o 2 observaciones acerca de las gráficas.

17.3 Clasificación de tarjetas: Clasifiquemos sistemas

Su profesor les dará varias tarjetas. Cada tarjeta tiene un sistema de ecuaciones.

Clasifiquen los sistemas en tres grupos, de acuerdo al número de soluciones que tiene cada sistema. Prepárense para explicar cómo saben en qué grupo está cada sistema.

¿Estás listo para más?

1. En las tarjetas, para cada sistema que no tiene solución, cambien un término constante para que el sistema tenga infinitas soluciones.

2. Para cada sistema que tiene infinitas soluciones, cambien un término constante para que el sistema no tenga ninguna solución.

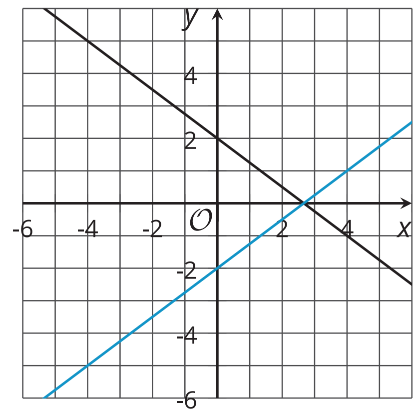
3. Expliquen por qué en estas situaciones es imposible cambiar un término constante para que el sistema tenga exactamente una solución.

Resumen de la lección 17

Hemos visto varios ejemplos de sistemas en los que solo un par de valores satisface ambas ecuaciones. Sin embargo, no todos los sistemas tienen una solución. Algunos sistemas tienen muchas soluciones y otros no tienen solución.

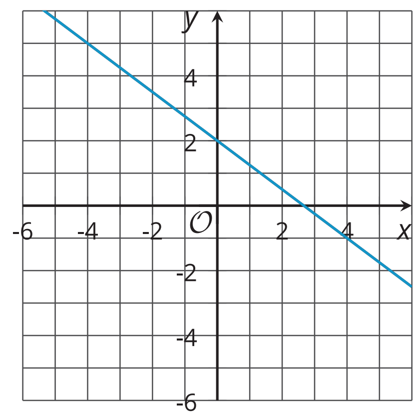
Examinemos tres sistemas de ecuaciones y sus gráficas.

Sistema 1: $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$



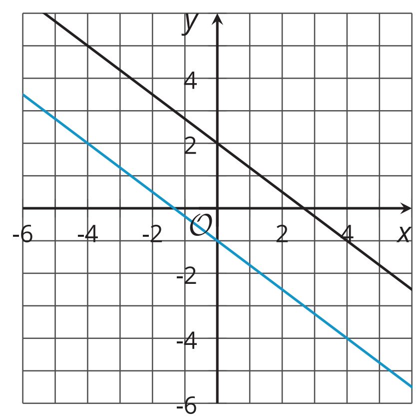
Las gráficas de las ecuaciones del sistema 1 se intersecan en un punto. Las coordenadas del punto son un par de valores que hacen, simultáneamente, que ambas ecuaciones sean verdaderas. Cuando solucionamos las ecuaciones, obtenemos exactamente una solución.

Sistema 2: $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 6x + 8y = 16 \end{cases}$



Las gráficas de las ecuaciones del sistema 2 parecen ser la misma recta. Esto sugiere que cada punto en la recta es una solución de ambas ecuaciones. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones.

Sistema 3: $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 3x + 4y = \text{-}4 \end{cases}$



Las gráficas de las ecuaciones del sistema 3 parecen ser paralelas. Si las rectas nunca se intersecan, entonces no hay ningún punto en común que sea una solución de ambas ecuaciones y el sistema no tiene solución.

¿Cómo podemos saber, sin graficar, que el sistema 2 efectivamente tiene muchas soluciones?

- Observemos que $3x + 4y = 8$ y $6x + 8y = 16$ son ecuaciones equivalentes. Al multiplicar la primera ecuación por 2 se obtiene la segunda ecuación. Al multiplicar la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ se obtiene la primera ecuación. Esto significa que cualquier solución de la primera ecuación es una solución de la segunda.
- Si reescribimos $3x + 4y = 8$ en la forma pendiente-punto de intersección, obtenemos $y = \dfrac{8 - 3x}{4}$ o $y = 2 - \frac{3}{4}x$. Si reescribimos $6x + 8y = 16$, obtenemos $y = \dfrac{16 - 6x}{8}$, que también es $y = 2 - \frac{3}{4}x$. ¡Ambas rectas tienen la misma pendiente y la misma intersección con el eje y!

¿Cómo podemos saber, sin graficar, que el sistema 3 no tiene solución?

- Observemos que en una ecuación $3x + 4y$ es igual a 8, pero en la otra ecuación es igual a -4. Como es imposible que la misma expresión sea igual a 8 y a -4, no hay un par de valores de x y de y que hagan, simultáneamente, que ambas ecuaciones sean verdaderas. Esto nos dice que el sistema no tiene solución.
- Si reescribimos cada ecuación en la forma pendiente-punto de intersección, obtenemos $y = 2 - \frac{3}{4}x$ y $y = -1 - \frac{3}{4}x$. Las dos gráficas tienen la misma pendiente, pero las intersecciones con el eje y son diferentes. Esto nos dice que las rectas son paralelas y que nunca se cruzarán.