Examinemos tasas de cambio

Calculemos tasas de cambio promedio de funciones exponenciales.

10.1 Costos que caen

Llamemos p a la función que da el costo $p(t)$, en dólares, de generar 1 vatio de potencia a partir de energía solar t años después de 1977. Esta tabla muestra los valores de p entre 1977 y 1987.

t	$p(t)$
0	80
1	60
2	45
3	33.75
4	25.31
5	18.98
6	14.24
7	10.68
8	8.01
9	6.01
10	4.51

¿Cuál expresión se puede usar para calcular la tasa de cambio promedio del costo de generar potencia a partir de energía solar entre 1977 y 1987?

A. $p(10) - p(0)$

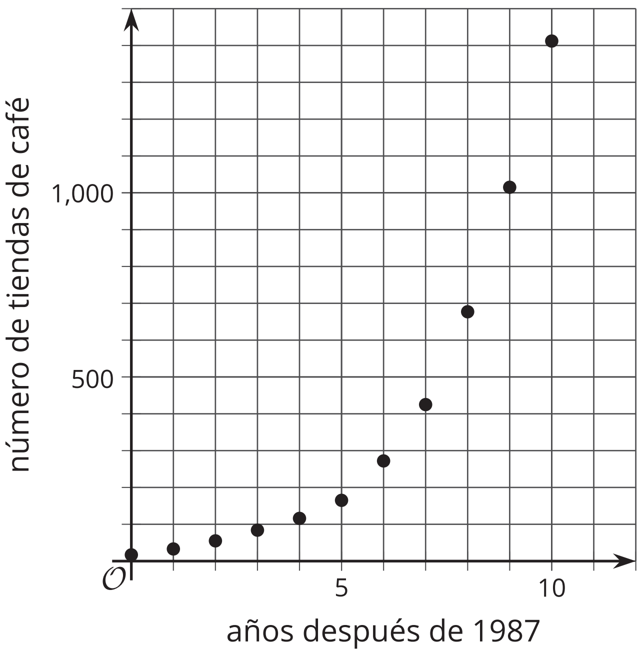
B. $p(10)$

C. $\frac{p(10) - p(0)}{10 - 0}$

D. $\frac{p(10)}{p(0)}$

10.2 Tiendas de café

Esta tabla y gráfica muestran el número de tiendas de café de una empresa, en todo el mundo, durante sus primeros 10 años de existencia, entre 1987 y 1997. El crecimiento del número de tiendas fue aproximadamente exponencial.



año	número de tiendas
1987	17
1988	33
1989	55
1990	84
1991	116
1992	165
1993	272
1994	425
1995	677
1996	1,015
1997	1,412

1. Encuentra la tasa de cambio promedio para cada periodo de tiempo. Muestra tu razonamiento.

   a. entre 1987 y 1990

   b. entre 1987 y 1993

   c. entre 1987 y 1997

2. Di algo que observes acerca de las tasas de cambio que calculaste. ¿Qué nos dicen estas tasas promedio sobre el crecimiento de la empresa?

3. Explica qué tan bien describen el crecimiento de la empresa las tasas de cambio promedio durante los siguientes periodos (usa la gráfica para sustentar tus respuestas):

   a. los primeros 3 años

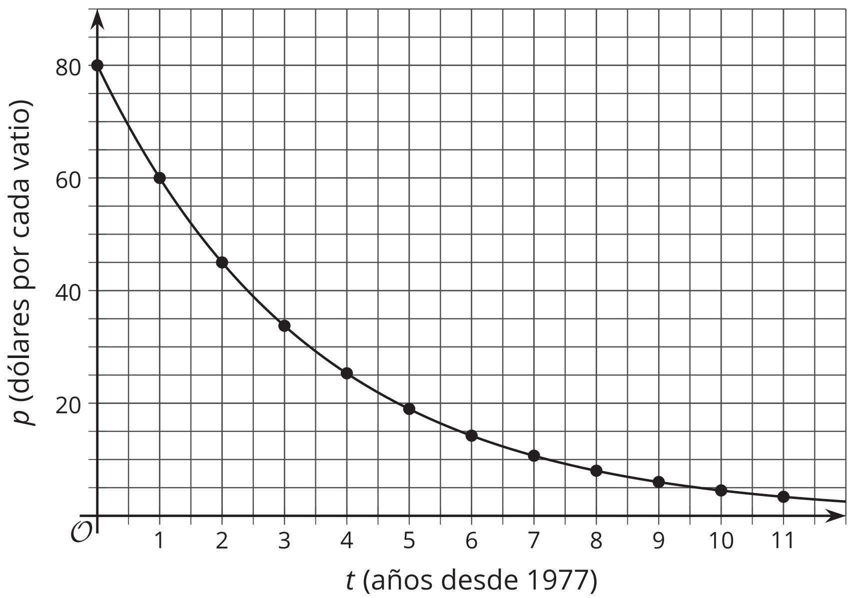
   b. los primeros 6 años

   c. todos los 10 años

4. Llamemos f a la siguiente función: $f(t)$ es el número de tiendas t años después de 1987. El valor de $f(20)$ es 15,011. Encuentra $\dfrac{f(20) - f(10)}{20 - 10}$ y explica lo que este valor nos indica acerca del cambio en el número de tiendas.

10.3 Retomemos el costo de paneles solares

Esta gráfica representa la función exponencial p que modela el costo $p(t)$, en dólares, de producir 1 vatio de energía solar, de 1977 a 1988, donde t es el número de años después de 1977.



1. Clare dijo: "Durante los primeros cinco años, entre 1977 y 1982, el costo disminuyó aproximadamente \$12 cada año. Pero durante los siguientes cinco años, entre 1983 y 1988, el costo tan solo disminuyó aproximadamente \$2 cada año". Muestra que Clare tiene razón.

2. Si la tendencia se mantiene, ¿entre 1987 y 1992 el promedio de disminución del precio será mayor o menor que \$2 cada año? Explica tu razonamiento.

¿Estás listo para más?

Ahora supongamos que el costo de producir 1 vatio de energía solar disminuyó \$12.20 cada año entre 1977 y 1982. Calcula cuáles serían los costos cada año y grafícalos junto a la gráfica que se muestra en la actividad. Compara estos costos con los costos reales. ¿Qué puedes decir?

Resumen de la lección 10

Cuando calculamos la tasa de cambio promedio de una función lineal, el valor de la tasa de cambio será el mismo sin importar el intervalo que escojamos. ¡Tener una tasa de cambio constante es una característica importante de las funciones lineales! Cuando una función lineal se representa con una gráfica, la pendiente de la recta es la tasa de cambio de la función.

Las funciones exponenciales también tienen características importantes. Hemos aprendido sobre el crecimiento exponencial y el decaimiento exponencial. Ambos se caracterizan por tener un factor de crecimiento constante en intervalos del mismo tamaño. ¿Pero qué significa esto en términos del valor de la tasa de cambio promedio de una función exponencial en un intervalo específico?

Analicemos una función exponencial que ya estudiamos antes. Llamemos A a la función que modela el área, A(t), en yardas cuadradas, que cubren las algas en un lago t semanas después de comenzar un tratamiento para controlar su proliferación. Esta tabla muestra cuántas yardas cuadradas cubren las algas durante las primeras 5 semanas del tratamiento.

t	A(t)
0	240
1	80
2	27
3	9
4	3

La tasa de cambio promedio de A entre la semana de inicio del tratamiento y la semana 2 es aproximadamente -107 yardas cuadradas por semana, ya que $\dfrac{A(2)-A(0)}{2-0} \approx -107$. Sin embargo, la tasa de cambio promedio de A entre la semana 2 y la semana 4 es tan solo aproximadamente -12 yardas cuadradas por semana, ya que $\dfrac{A(4)-A(2)}{4-2} \approx -12$.

Las tasas de cambio promedio negativas muestran que A está disminuyendo en ambos intervalos, pero la tasa de cambio promedio entre las semanas 0 y 2 indica que en este intervalo los valores están disminuyendo más rápido que entre las semanas 2 y 4 debido al efecto del factor de decaimiento. Para una función exponencial que tiene un factor de crecimiento mayor que 1, los valores de la tasa de cambio promedio de cada intervalo son positivos, y en el segundo intervalo los valores aumentan más rápido que en el primero, debido al efecto del factor de crecimiento.