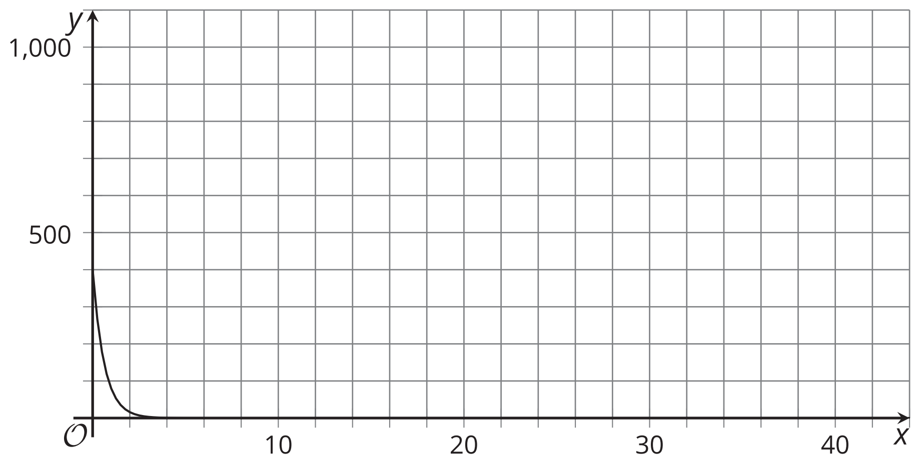
Modelemos el comportamiento exponencial

Usemos funciones exponenciales para modelar situaciones de la vida real.

11.1 Preguntas sobre los rectángulos de vista

Esta es una gráfica de una función, f, definida por $f(x) = 400 \cdot (0.2)^x$.



1. Identifica el rectángulo de vista que se muestra.
2. Sugiere un rectángulo de vista nuevo que haga que la gráfica sea:
    a. más informativa
    b. menos informativa

Prepárate para explicar tu razonamiento.

 CC BY NC 2024 Illustrative Mathematics®

11.2 Observemos rebotes

Estas son mediciones de la altura máxima que alcanza una pelota de tenis después de rebotar varias veces sobre una superficie de hormigón.

n, número del rebote	h, altura (centímetros)
0	150
1	80
2	43
3	20
4	11

1. ¿Cuál función es más adecuada para modelar la altura máxima, h, en centímetros, de la pelota de tenis después de n rebotes: una función lineal o una función exponencial? Usa datos de la tabla para sustentar tu respuesta.

2. El reglamento de tenis indica que, al rebotar, una pelota de tenis que se suelta sobre hormigón debe alcanzar una altura entre 53% y 58% de la altura a la que se suelta. ¿Esta pelota de tenis cumple con este requisito? Explica tu razonamiento.

3. Escribe una ecuación que modele la altura de rebote, h, de esta pelota de tenis después de n rebotes.

4. ¿Aproximadamente cuántos rebotes se necesitan para que la altura de rebote de la pelota de tenis sea menor que 1 centímetro? Explica tu razonamiento.

11.3 ¿Cuál rebota más?

Tu profesor le dará a tu grupo tres balones diferentes.

Su objetivo es medir las alturas de los rebotes, modelar la relación entre el número de rebotes y las alturas, y comparar los balones para ver cuál es el que más rebota.

1. Completen la tabla. Asegúrense de anotar cuál balón va en cuál columna.

***n*, número de rebotes**	***a*, altura del balón 1 (cm)**	***b*, altura del balón 2 (cm)**	***c*, altura del balón 3 (cm)**
0			
1			
2			
3			
4			

2. ¿Cuál balón parece ser el que más rebota? ¿Cuál parece ser el que menos rebota? Expliquen su razonamiento.

3. Para cada balón, escriban una ecuación que exprese la altura de rebote en términos del número de rebotes, n.

4. Expliquen cómo las ecuaciones nos pueden ayudar a decidir cuál es el balón que más rebota.

5. Si el balón que más rebota se deja caer desde una altura de 300 cm, ¿qué ecuación modela la altura, h, de sus rebotes?

¿Estás listo para más?

1. Si el balón 1 se suelta desde un punto que está al doble de la altura, ¿el balón sería más, igual o menos rebotador? Explica tu razonamiento.

2. Un nuevo balón 4 rebota la mitad de lo que rebota el balón que menos rebota. ¿Qué ecuación describiría la altura, h, del rebote del balón 4 en términos del número de rebotes, n?

3. Un nuevo balón 5 se suelta desde una altura de 150 centímetros. El balón rebota muy poco (una o dos veces) y luego empieza a rodar. ¿Cómo describirías su factor de rebote? Explica tu razonamiento.

11.4 Observemos más rebotes

La tabla muestra algunas alturas que alcanza un balón después de varios rebotes.

número del rebote	altura en centímetros
0	
1	
2	73.5
3	51.5
4	36

1. ¿Este balón rebota más o menos que la pelota de tenis de una actividad anterior? Explica o muestra tu razonamiento.

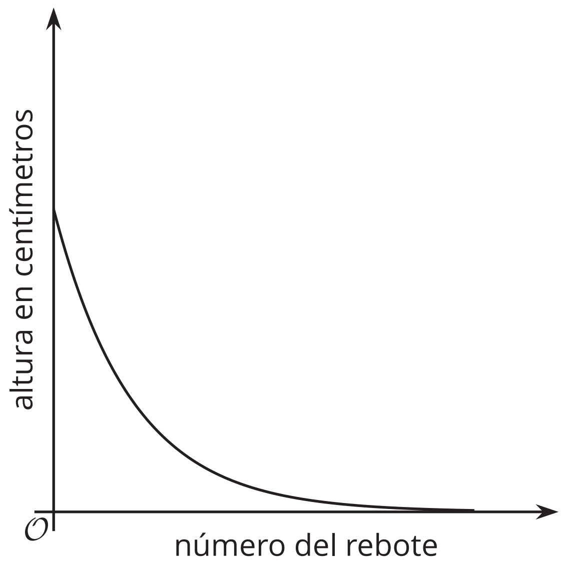
2. ¿Desde qué altura se dejó caer el balón? Explica o muestra tu razonamiento.

3. Escribe una ecuación que represente la altura, h, que alcanza el balón, en centímetros, después de n rebotes.

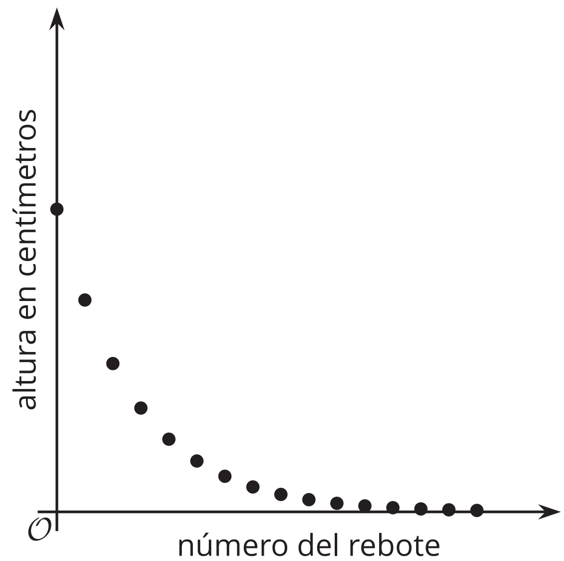
 CC BY NC 2024 Illustrative Mathematics®

4. ¿Cuál gráfica es más adecuada para representar la ecuación de h: la gráfica A o la gráfica B? Explica tu razonamiento.

A



B



5. ¿La altura que alcanza este balón después del rebote n será menor que la altura que alcanza la pelota de tenis después del mismo rebote? Explica tu razonamiento.

CC BY NC 2024
Illustrative Mathematics®

Resumen de la lección 11

A veces, los datos parecen indicar que hay una relación exponencial. Por ejemplo, esta tabla muestra la altura que alcanza cierta pelota después de cada rebote. En la tabla vemos que la altura disminuye con cada rebote.

número del rebote	altura alcanzada después del rebote en centímetros
1	95
2	61
3	39
4	26

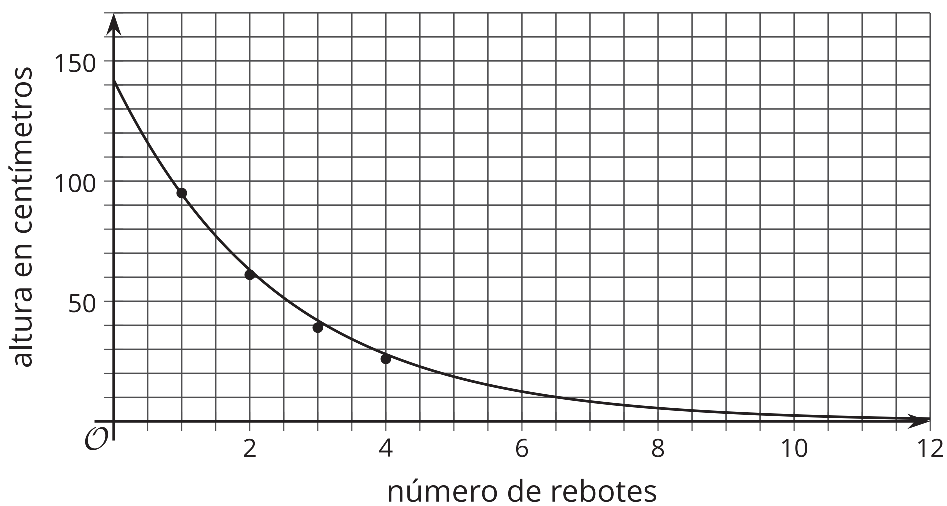
Para descubrir qué fracción de la altura anterior se alcanza después de cada rebote, podemos dividir las alturas alcanzadas después de dos rebotes consecutivos: $\frac{61}{95}$ es aproximadamente 0.642, $\frac{39}{61}$ es aproximadamente 0.639 y $\frac{26}{39}$ es aproximadamente 0.667.

Todos estos cocientes son cercanos a $\frac{2}{3}$. Esto sugiere que podríamos modelar la relación con una función exponencial, y que la altura de un rebote al siguiente está disminuyendo por un factor de aproximadamente $\frac{2}{3}$.

La altura, h, que alcanza la pelota, en cm, después de n rebotes se puede modelar con esta ecuación:

$$h = 142 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Esta es una gráfica de la ecuación.



Esta gráfica muestra tanto los puntos de los datos como los puntos que se obtienen con la ecuación. Esto nos permite entender más sobre la situación. Por ejemplo, no nos dieron la altura desde la cual se dejó caer la pelota, pero ahora la podemos determinar. Si $\frac{2}{3}$ de la altura inicial es aproximadamente 95 centímetros, entonces la altura inicial es aproximadamente 142.5 centímetros, porque $95 \div \frac{2}{3} = 142.5$. También podemos ver que se necesitarán 7 rebotes para que la altura del rebote sea de menos de 10 centímetros.

CC BY NC 2024 Illustrative Mathematics®