Congruencia de triángulos lado-ángulo-lado

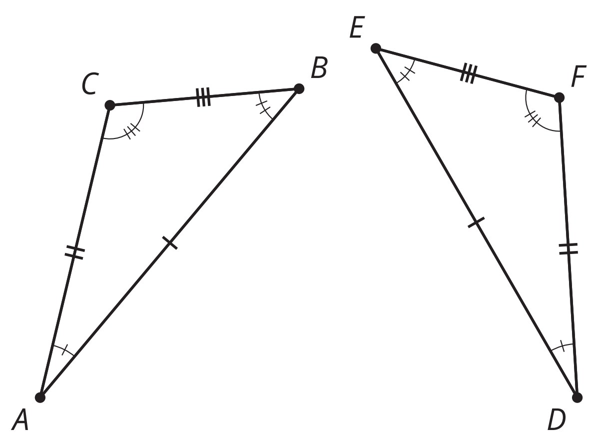
Usemos definiciones y teoremas para determinar qué debe ser verdad sobre ciertas figuras, sin necesidad de medir todas sus partes.

6.1 ¿Exceso de información?

Subraya cada afirmación de la lista que se usa en la demostración. También subraya en la demostración el lugar donde se usó esa afirmación.

Afirmaciones dadas:

- El segmento AB es congruente al segmento DE.
- El segmento AC es congruente al segmento DF.
- El segmento BC es congruente al segmento EF.
- El ángulo A es congruente al ángulo D.
- El ángulo B es congruente al ángulo E.
- El ángulo C es congruente al ángulo F.



Demostración:

1. Como los segmentos AB y DE tienen la misma longitud, entonces son congruentes. Por lo tanto, existe un movimiento rígido que lleva AB a DE.
2. Apliquemos ese movimiento rígido al triángulo ABC. La imagen de A va a coincidir con D y la imagen de B va a coincidir con E.
3. No podemos estar seguros todavía de que la imagen de C coincida con F. Si hace falta, refleja la imagen del triángulo ABC con respecto a DE para asegurarte de que la imagen de C, que llamamos C', esté del mismo lado de DE que F (esta reflexión no cambia las imágenes de A ni de B).
4. Sabemos que la imagen del ángulo A es congruente al ángulo D porque los movimientos rígidos no cambian la medida de los ángulos.
5. C' debe estar sobre el rayo DF porque C' y F están del mismo lado de DE y forman el mismo ángulo con DE en D.
6. Como el segmento DC' es la imagen de AC y los movimientos rígidos no cambian las distancias, deben tener la misma longitud.
7. También sabemos que AC y DF miden lo mismo. Por eso, DC' y DF deben medir lo mismo.
8. Como C' y F están a la misma distancia de D y sobre el mismo rayo, deben estar en el mismo lugar.
9. Hemos encontrado un movimiento rígido que lleva A a D, B a E y C a F; por lo tanto, el triángulo ABC es congruente al triángulo DEF.

6.2 Demostremos el teorema de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado

1. Dos triángulos tienen 2 parejas de lados correspondientes que son congruentes, y los ángulos correspondientes que forman esos lados también son congruentes. Dibuja 2 triángulos que cumplan con lo anterior. Llámalos LMN y PQR, de forma que:
   - El segmento LM sea congruente al segmento PQ.
   - El segmento LN sea congruente al segmento PR.
   - El ángulo L sea congruente al ángulo P.

2. Usa una secuencia de movimientos rígidos que lleve LMN a PQR. Explica en cada paso cómo sabes que uno o más vértices coinciden.

3. Devuélvete y observa las demostraciones de triángulos congruentes que has leído y escrito. ¿Tienes suficiente información para escribir una demostración como esas? Usa una de esas demostraciones como guía para escribir esta demostración.

¿Estás listo para más?

Esta es una consecuencia del teorema de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado: si conocemos la longitud de dos lados de un triángulo y conocemos la medida del ángulo que ellos forman, entonces solo hay una longitud posible para el tercer lado.

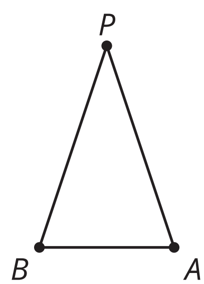
Supón que un triángulo tiene un lado que mide 5 cm y otro que mide 12 cm.

1. ¿Qué tan largo puede ser el tercer lado? ¿Qué tan corto puede ser?

2. ¿Cuánto mediría el tercer lado si el ángulo que forman los dos lados dados midiera 90 grados?

6.3 ¿Qué sabemos con certeza sobre los triángulos isósceles?

Mai y Kiran comenzaron a demostrar que los dos ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes. Completa la demostración. Dibuja la **recta auxiliar** y defínela de manera que puedas usar el teorema de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado para completar cada paso de esta demostración.



Dibuja ________________.

El segmento PA es congruente al segmento PB por la definición de un triángulo isósceles.

El ángulo ________________ es congruente al ángulo ________________ porque ________________.

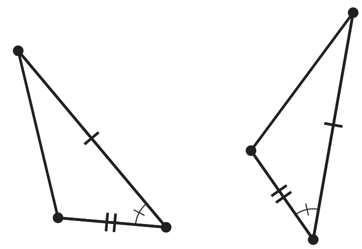
El segmento PQ es congruente a él mismo.

Entonces, el triángulo APQ es congruente al triángulo BPQ por el teorema de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado.

Por lo tanto, ________________.

Resumen de la lección 6

Si todas las parejas de lados y ángulos correspondientes de dos triángulos son congruentes, entonces podemos encontrar una transformación rígida que lleve los vértices de un triángulo a los vértices correspondientes del otro. Esto demuestra que si todas las parejas de lados y ángulos correspondientes de dos triángulos son congruentes, entonces los dos triángulos deben ser congruentes. Pero para justificar que los vértices coinciden no necesitamos usar todas las congruencias. Podemos justificar que dos triángulos son congruentes con solo saber que hay dos parejas de lados correspondientes congruentes y que los ángulos que forman también son congruentes. Esto se llama el *teorema de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado*.



Para concluir que dos triángulos, o dos partes de dos triángulos, son congruentes, observa si la información dada o el diagrama indican que 2 parejas de lados correspondientes son congruentes y que el ángulo que ellos forman es congruente a su ángulo correspondiente. De ser así, no necesitamos mostrar ni justificar todas las transformaciones que llevan un triángulo al otro. En cambio, podemos explicar por qué sabemos que dos parejas de lados correspondientes son congruentes y los ángulos que ellos forman también son congruentes, y concluir que los triángulos deben ser congruentes por el teorema de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado.

A veces, para demostrar la congruencia de dos triángulos, debemos añadir rectas al diagrama. Podemos definir qué propiedades tienen esas rectas basándonos en la forma en que las construimos (¿es una bisectriz?, ¿una mediatriz?, ¿una recta que une dos puntos dados?). A esas rectas, los matemáticos las llaman **rectas auxiliares** porque “auxiliar“ significa que “da ayuda o soporte adicional”. Estas rectas nos permiten ver triángulos que están ocultos.

