Unidad 9, Lección 5

Entendamos el decaimiento exponencial

Exploremos el decaimiento exponencial.

5.1 Observa y pregúntate: Dos tablas

¿Qué observas? ¿Qué te preguntas?

Tabla A

x	y
0	2
1	$3\frac{1}{2}$
2	5
3	$6\frac{1}{2}$
4	8

Tabla B

x	y
0	2
1	3
2	$\frac{9}{2}$
3	$\frac{27}{4}$
4	$\frac{81}{8}$

5.2 ¿Qué queda?

1. Podemos usar los siguientes pasos para saber cuánto dinero le queda a Diego después de gastar $\frac{1}{4}$ de $100. Explica cada uno.
   - Paso 1: $100 - \frac{1}{4} \cdot 100$
   - Paso 2: $100\left(1 - \frac{1}{4}\right)$
   - Paso 3: $100 \cdot \frac{3}{4}$
   - Paso 4: $\frac{3}{4} \cdot 100$

2. Una persona gana $1,800 al mes, pero $\frac{1}{3}$ de esa cantidad la usa para pagar el alquiler de su vivienda. ¿Cuáles dos números puedes multiplicar para averiguar cuánto le queda después de pagar su alquiler?

3. Escribe una expresión en la que solo uses multiplicación y que sea equivalente a x reducido en $\frac{1}{8}$ de x.

5.3 El valor de un automóvil

Después de comprar un automóvil nuevo, este pierde $\frac{1}{3}$ de su valor cada año que pasa. Supongamos que el automóvil nuevo costó $18,000.

1. A un comprador le preocupa que el automóvil no valdrá nada al cabo de tres años. ¿Estás de acuerdo? Explica tu razonamiento.

2. Si el automóvil pierde $\frac{1}{3}$ de su valor cada año, ¿cuánto seguirá valiendo el automóvil?

   Haz una pausa para tener una discusión con toda la clase.

3. Escribe una expresión que muestre cómo encontrar el valor del automóvil en cada año de la tabla.

año	valor del automóvil (dólares)
0	18,000
1	
2	
3	
6	
t	

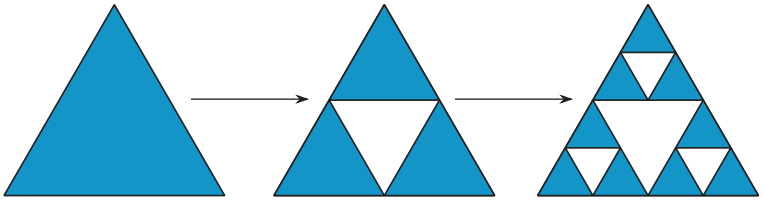
4. Escribe una ecuación que relacione el valor del automóvil en dólares, v, con el número de años, t.

5. Usa tu ecuación para encontrar v cuando t es 0. ¿Qué significa este valor de v en esta situación?

6. Otro automóvil pierde valor a una tasa distinta. El valor de este automóvil en dólares, d, al cabo de t años, se puede representar con la ecuación $d = 10{,}000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$. Explica lo que significan los números 10,000 y $\frac{4}{5}$ en esta situación.

¿Estás listo para más?

Empieza con un triángulo equilátero que tenga un área de 1 unidad cuadrada. Divídelo en 4 partes congruentes como se muestra en la figura y quita la parte del medio. Después, repite este proceso con cada una de las partes que quedan. Sigue repitiendo este proceso con las partes que van quedando. La figura muestra los dos primeros pasos de esta construcción.



¿Qué fracción del área se quita cada vez? ¿Cuánta área queda después del paso ? Usa una calculadora para encontrar cuánta área *queda* en el triángulo después de 50 pasos.

Resumen de la lección 5

A veces, una cantidad crece por el mismo factor en intervalos regulares. Por ejemplo, una población puede duplicarse cada año. A veces, una cantidad *disminuye* por el mismo factor en intervalos regulares. Por ejemplo, un automóvil puede perder un tercio de su valor cada año.

Examinemos una situación en la que una cantidad disminuye por el mismo factor en intervalos regulares. Supongamos que una población de bacterias comienza en 100,000 y que $\frac{1}{4}$ de la población muere cada día. Un día después, la población es $100{,}000 - \frac{1}{4} \cdot 100{,}000$, que se puede escribir como $100{,}000\left(1 - \frac{1}{4}\right)$. La población al cabo de un día es $\frac{3}{4}$ de 100,000, que es igual a 75,000. La población al cabo de dos días es $\frac{3}{4} \cdot 75{,}000$. La tabla muestra la población al cabo de distintos números de días:

número de días	población de bacterias
0	100,000
1	75,000 (o $100{,}000 \cdot \frac{3}{4}$)
2	56,250 (o $100{,}000 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ o $100{,}000 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$)
3	aproximadamente 42,188 (o $100{,}000 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ o $100{,}000 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$)

En general, d días después de que la población era 100,000, la población p está dada por la ecuación:

$$p = 100{,}000 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d,$$

con un factor de $\frac{3}{4}$ por cada día que pasa.

Las situaciones con cantidades que disminuyen exponencialmente se describen con el término *decaimiento exponencial.* El multiplicador (en este caso, $\frac{3}{4}$) se sigue llamando el *factor de crecimiento*, aunque a veces las personas lo llaman el *factor de decaimiento*.