Distintos intervalos de capitalización

Descubramos lo que ocurre cuando aplicamos repetidamente el mismo aumento porcentual en distintos intervalos de tiempo.

17.1 Rentabilidad en tres años

Se depositan \$1,000 en una cuenta bancaria que gana mensualmente un interés del 1%. Cada mes, el interés se abona a la cuenta y no se hacen más depósitos ni retiros.

Para calcular el saldo de la cuenta, en dólares, después de 3 años, Elena escribió: $1{,}000 \cdot (1.01)^{36}$ y Tyler escribió: $1{,}000 \cdot \left((1.01)^{12}\right)^3$.

Discute con un compañero:

1. ¿Por qué tanto la expresión de Elena como la expresión de Tyler representan correctamente el saldo de la cuenta?

2. Kiran dijo: “El saldo de la cuenta es aproximadamente $1{,}000 \cdot (1.1268)^3$”. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué sí o por qué no?

17.2 Consideremos distintas tarjetas de crédito

Las tarjetas de una empresa de tarjetas de crédito tienen una TNA (tasa nominal anual) de 24%, pero el interés se capitaliza mensualmente. Es decir, se cobra 2% de intereses cada mes.

Imagina que el titular de una tarjeta de crédito la usa para hacer compras por un valor de $1,000 y no hace más compras ni pagos. La empresa de tarjetas de crédito no cobra ninguna tarifa adicional que no sea el interés.

1. Escribe expresiones que representen el valor de la deuda después de 1 mes, 2 meses, 6 meses y 1 año.

2. Escribe una expresión que represente el valor de la deuda, en dólares, después de m meses sin haber hecho pagos.

3. ¿Cuánto debe el titular de la tarjeta después de 1 año sin haber hecho pagos? ¿Cuál es la TEA (tasa efectiva anual) de esta tarjeta de crédito?

4. Escribe una expresión que represente el valor de la deuda, en dólares, después de t años sin haber hecho pagos. Prepárate para explicar tu expresión.

¿Estás listo para más?

Una cuenta bancaria tiene un saldo inicial de $800 y paga una tasa de interés anual del 12% . Todos los intereses que se ganan se abonan a la cuenta, pero no se hacen más depósitos ni retiros. Escribe una expresión que represente el saldo de la cuenta:

1. Después de 5 años, si el interés se capitaliza n veces al año.
2. Después de t años, si el interés se capitaliza n veces al año.
3. Después de t años, si el depósito inicial es de P dólares y hay una tasa de interés anual de r, capitalizada n veces al año.

17.3 ¿Cuál escogerías?

Supón que tienes $500 para invertir y puedes escoger entre dos opciones de inversión.

- Opción 1: cada 3 meses, el saldo aumenta en 3% debido a la tasa de interés que se aplicó
- Opción 2: cada 4 meses, el saldo aumenta en 4% debido a la tasa de interés que se aplicó

¿Cuál de las opciones escogerías? Construye un modelo matemático para cada opción de inversión y úsalo para apoyar tu decisión. Recuerda especificar lo que estás suponiendo sobre la situación.

¿Estás listo para más?

¿Hay un periodo de tiempo durante el cual la primera opción (tasa de interés del 3%, capitalizada trimestralmente) *siempre* será la mejor opción? Si es así, ¿cuál podría ser? Si no es así, ¿a qué se debe?

17.4 Cambios con los años

1. La función, f, está definida por $f(x) = 15 \cdot (1.07)^x$ y modela el costo de la matrícula, en miles de dólares, de una universidad x años después de 2017.
   a. ¿Cuál es el costo de la matrícula de la universidad en el año 2017?
   b. ¿A qué tasa anual aumenta la matrícula?
   c. Supongamos que la función que modela el costo sigue siendo la misma para los años anteriores al 2017. ¿Cuál fue el costo de la matrícula en el año 2000? Muestra tu razonamiento.
   d. ¿Cuál fue el costo de la matrícula en el año 2010?
   e. ¿Cuál será el costo de la matrícula cuando te gradúes de la preparatoria?

2. Entre los años 2000 y 2010 el costo de la matrícula casi se duplicó.
   a. ¿Por qué factor aumentará el costo de la matrícula entre los años 2017 y 2027? Muestra tu razonamiento.
   b. Escoge otro periodo de 10 años y encuentra el factor por el que aumenta el costo de la matrícula. Muestra tu razonamiento.
   c. ¿Qué puedes decir acerca de cómo cambia el costo de la matrícula en cualquier periodo de 10 años (suponiendo que la función, f, sigue siendo un modelo apropiado)? Explica o muestra cómo sabes que este *siempre* será el caso.

Resumen de la lección 17

En muchas situaciones, el interés se calcula más de una vez al año. La frecuencia con la que se capitaliza el interés y se suma a la cantidad anterior tiene un efecto en la cantidad total de intereses ganados (o que se deben) con el paso del tiempo.

Supongamos que una cuenta bancaria tiene un saldo de $1,000 y una tasa de interés nominal anual del 6% al año. No se hacen depósitos ni retiros adicionales.

Si el banco capitaliza el interés anualmente, se agregará el interés a la cuenta una vez en un año, a una tasa del 6%. Si el interés se capitaliza cada 6 meses, se agregará el interés a la cuenta dos veces en un año, a una tasa del 3% del saldo cada vez (porque $6 \div 2 = 3$). Si se capitaliza cada 3 meses, el interés se agregará 4 veces, cada vez a una tasa del 1.5% sobre el saldo, y así sucesivamente.

Esta tabla muestra las tasas de interés nominal que se usan para distintos intervalos de capitalización, junto con las expresiones correspondientes del saldo de la cuenta en un año.

intervalo de capitalización	**frecuencia de capitalización al año**	**tasa de interés nominal**	**saldo de la cuenta en un año**
anual (12 meses)	1 vez	6%	$1{,}000 \cdot (1 + 0.06)$
semestral (6 meses)	2 veces	3%	$1{,}000 \cdot (1 + 0.03)^2$
trimestral (3 meses)	4 veces	1.5%	$1{,}000 \cdot (1 + 0.015)^4$
mensual (1 mes)	12 veces	0.5%	$1{,}000 \cdot (1 + 0.005)^{12}$

Si evaluamos las expresiones, encontramos que la cuenta tiene los siguientes saldos al final del año:

- anual: $1{,}000 \cdot (1.06) = 1{,}060$
- semestral: $1{,}000 \cdot (1.03)^2 = 1{,}060.90$
- trimestral: $1{,}000 \cdot (1.015)^4 \approx 1{,}061.36$
- mensual: $1{,}000 \cdot (1.005)^{12} \approx 1{,}061.68$

Observa que cuanto mayor sea la frecuencia con la que se paga el interés, mayor será el saldo.

