Solucionemos sistemas de ecuaciones con el método de eliminación (parte 2)

Pensemos por qué sumar y restar ecuaciones sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

15.1 ¿Sigue siendo verdadera?

Esta ecuación es verdadera: $50 + 1 = 51$.

1. Realiza cada una de las siguientes operaciones y responde estas preguntas: ¿cuál es la ecuación que resulta?, ¿sigue siendo una ecuación verdadera?
   a. Súmale 12 a cada lado de la ecuación.

   b. Súmale $10 + 2$ al lado izquierdo de la ecuación y 12 al lado derecho.

   c. Súmale la ecuación $4 + 3 = 7$ a la ecuación $50 + 1 = 51$.

2. Escribe una ecuación nueva que cuando se le sume a $50 + 1 = 51$, dé una ecuación que también sea verdadera.

3. Escribe una ecuación nueva que cuando se le sume a $50 + 1 = 51$, dé una ecuación falsa.

15.2 Materiales para el salón de clase

Una profesora hizo un pedido de 20 calculadoras y 10 cintas para medir para su clase. Pagó $495 por el pedido. Poco tiempo después, ella se dio cuenta de que no había pedido suficientes materiales, por lo que hizo un nuevo pedido de 8 calculadoras más y 1 cinta de medir más, y pagó $178.50.

Este sistema representa las restricciones de la situación:

$$\begin{cases} 20c + 10m = 495 \\ 8c + m = 178.50 \end{cases}$$

1. Discutan con su compañero:
   a. En esta situación, ¿qué significan las soluciones de la primera ecuación?
   b. ¿Qué significan las soluciones de la segunda ecuación?
   c. Para cada ecuación, ¿cuántas soluciones hay? Expliquen cómo lo saben.
   d. En esta situación, ¿qué significa la solución del sistema?
2. Encuentren la solución del sistema. Expliquen o muestren su razonamiento.

3. Para recibir el reembolso del dinero que pagó por los materiales, la profesora escribió: "Materiales comprados: 28 calculadoras y 11 cintas para medir. Costo: $673.50".
   a. Escriban una ecuación que represente la relación entre el número de calculadoras, el número de cintas para medir, los precios de estos materiales y la cantidad total de dinero que se gastó.

   b. ¿De qué manera se relaciona esta ecuación con las dos primeras ecuaciones?

c. En esta situación, ¿qué significan las soluciones de esta ecuación?

d. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación? ¿Cuántas soluciones tienen sentido en esta situación? Expliquen su razonamiento.

15.3 Unos cuantos sistemas

Soluciona cada sistema de ecuaciones sin graficar y muestra tu razonamiento. Después, revisa tus soluciones.

A $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ \text{-}2x + 4y = 14 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 9 \end{cases}$

D $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 6x - 5y = 20 \end{cases}$

¿Estás listo para más?

Este sistema tiene tres ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ -3x + y + 2z = -14 \\ 3x + y - z = 10 \end{cases}$

1. Suma las dos primeras ecuaciones para obtener una ecuación nueva.

2. Suma la segunda ecuación con la tercera ecuación para obtener una ecuación nueva.

3. Soluciona el sistema que consta de tus dos nuevas ecuaciones.

4. ¿Cuál es la solución del sistema original de ecuaciones?

Resumen de la lección 15

Cuando solucionamos un sistema de dos ecuaciones, ¿por qué es válido sumar las dos ecuaciones o restarle una ecuación a la otra?

Recordemos que una ecuación es una afirmación que dice que dos cosas son iguales. Por ejemplo, la ecuación $a = b$ dice que un número a tiene el mismo valor que otro número b. La ecuación $10 + 2 = 12$ dice que $10 + 2$ tiene el mismo valor que 12.

Si $a = b$ y $10 + 2 = 12$ son afirmaciones verdaderas, entonces sumar $10 + 2$ a a y sumar 12 a b corresponde a sumar la misma cantidad a cada lado de $a = b$. El resultado, $a + 10 + 2 = b + 12$, también es una afirmación verdadera.

Siempre que sumamos una cantidad igual a cada lado de una ecuación verdadera, los dos lados de la ecuación que resulta también serán iguales.

Podemos razonar de la misma manera sobre sumar ecuaciones con variables en un sistema como este:

$$\begin{cases} d + f = 17 \\ \text{-}2d + f = \text{-}1 \end{cases}$$

En cada ecuación, si (d, f) es una solución, la expresión al lado izquierdo del signo igual y el número al lado derecho del signo igual son iguales. Dado que $\text{-}2d + f$ es igual a -1:

- Sumarle $\text{-}2d + f$ a $d + f$ y sumarle -1 a 17 equivale a sumar una cantidad igual a cada lado de $d + f = 17$. Los dos lados de la ecuación nueva, $\text{-}d + 2f = 16$, siguen siendo iguales.

$$\begin{array}{rcrl} d + f &=& 17 & \\ \text{-}2d + f &=& \text{-}1 & + \\ \hline \text{-}d + 2f &=& 16 & \end{array}$$

Los valores de d y f que hacen que las ecuaciones originales sean verdaderas también hacen que esta ecuación sea verdadera.

- Restarle $\text{-}2d + f$ a $d + f$ y restarle -1 a 17 equivale a restar una cantidad igual a cada lado de $d + f = 17$. Los dos lados de la ecuación nueva, $3d = 18$, siguen siendo iguales.

$$\begin{array}{rcrl} d + f &=& 17 & \\ \text{-}2d + f &=& \text{-}1 & - \\ \hline 3d \quad &=& 18 & \end{array}$$

La variable f se eliminó, y el valor de d que hace que ambas ecuaciones originales sean verdaderas también hace que esta ecuación sea verdadera.

A partir de $3d = 18$, sabemos que $d = 6$. Dado que 6 también es el valor de d que hace que las ecuaciones originales sean verdaderas, podemos sustituirlo en una de esas ecuaciones y encontrar el valor de f.

La solución del sistema es $d = 6$, $f = 11$, o el punto $(6, 11)$ en las gráficas que representan el sistema. Si remplazamos d y f por 6 y 11 respectivamente en cualquiera de las ecuaciones, obtendremos ecuaciones verdaderas. (¡Inténtalo!).