Solucionemos sistemas de ecuaciones con el método de eliminación (parte 3)

Descubramos cómo multiplicar ecuaciones por un factor nos ayuda a solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

16.1 Multipliquemos ecuaciones por un número

Consideren este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + y = 1 & \text{Ecuación A} \\ x + 2y = 9 & \text{Ecuación B} \end{cases}$$

1. Usen tecnología para graficar las ecuaciones. Después, identifiquen las coordenadas de la solución.
2. Escriban algunas ecuaciones equivalentes a la ecuación A. Para hacerlo, multipliquen ambos lados de la ecuación por el mismo número (por ejemplo, por 2, por -5 o por $\frac{1}{2}$). Llamen A1, A2 y A3 a las nuevas ecuaciones que obtuvieron. Escriban sus ecuaciones aquí:
    a. Ecuación A1:
    b. Ecuación A2:
    c. Ecuación A3:
3. Grafiquen las ecuaciones A1, A2 y A3. Hagan algunas observaciones acerca de las gráficas.

16.2 Escribamos un sistema nuevo para resolver un sistema dado

Este es un sistema que solucionaron antes usando gráficas: $\begin{cases} 4x + y = 1 & \text{Ecuación A} \\ x + 2y = 9 & \text{Ecuación B} \end{cases}$

Para empezar a solucionar el sistema, Elena escribió:

$$\begin{aligned} 4x + y &= 1 \\ 4x + 8y &= 36 \end{aligned}$$

Y después ella escribió:

$$\begin{array}{r} 4x + y = 1 \\ 4x + 8y = 36 - \\ \hline \text{-}7y = \text{-}35 \end{array}$$

1. ¿Cuáles fueron las dos primeras movidas que hizo Elena? ¿Cuáles pueden ser las razones para hacer esas movidas?

2. Completa el proceso de solución con álgebra. Muestra que efectivamente la solución es $x = \text{-}1, y = 5$.

16.3 ¿Qué sigue?

Su profesor les dará algunos papelitos que tienen sistemas de ecuaciones escritos en ellos. Cada sistema representa un paso de la solución de este sistema:

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x + 6y = 15 \\ \text{-}x + 18y = 11 \end{cases}$$

Ordenen los papelitos de manera que estos conduzcan a la solución. Prepárense para:

- Describir qué movida se hace para obtener un sistema a partir del sistema anterior.
- Explicar por qué cada sistema es equivalente al sistema anterior.

¿Estás listo para más?

La solución de este sistema de ecuaciones es $(5, \text{-}2)$: $\begin{cases} Ax - By = 24 \\ Bx + Ay = 31 \end{cases}$

Encuentra los valores de A y B.

16.4 Construyamos sistemas equivalentes

Este es un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 12a + 5b = \text{-}15 \\ 8a + b = 11 \end{cases}$$

1. Para solucionar este sistema, Diego escribió estos sistemas equivalentes como sus primeros dos pasos.

   Paso 1:

   $$\begin{cases} 12a + 5b = \text{-}15 \\ \text{-}40a + \text{-}5b = \text{-}55 \end{cases}$$

   Paso 2:

   $$\begin{cases} 12a + 5b = \text{-}15 \\ \text{-}28a = \text{-}70 \end{cases}$$

   Describe la movida que Diego hizo para obtener cada uno de los sistemas equivalentes. Prepárate para explicar cómo sabes que los sistemas del paso 1 y del paso 2 tienen la misma solución que el sistema original.

2. Escribe otros sistemas equivalentes (distintos a los de Diego) que permitan eliminar una variable y que hagan posible solucionar el sistema original. Prepárate para describir las movidas que hiciste para crear cada sistema nuevo y explicar por qué cada uno tiene la misma solución que el sistema original.

3. Usa tus sistemas equivalentes para solucionar el sistema original. Después, verifica tu solución reemplazando tus respuestas en el sistema original.

Resumen de la lección 16

Ahora tenemos dos estrategias algebraicas para solucionar sistemas de ecuaciones: el método de sustitución y el método de eliminación. En algunos sistemas, las ecuaciones nos pueden dar una pista sobre cuál método usar. Por ejemplo:

$$\begin{cases} y = 2x - 11 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases}$$

En este sistema, la y ya está despejada en una ecuación. Podemos solucionar el sistema reemplazando y por $2x - 11$ en la segunda ecuación y encontrando x.

$$\begin{cases} 3x - y = \text{-}17 \\ \text{-}3x + 4y = 23 \end{cases}$$

Este sistema está planteado de una forma que facilita usar el método de eliminación porque la variable x tiene coeficientes opuestos en las ecuaciones. Sumar las dos ecuaciones elimina x, y podemos encontrar el valor de y.

En otros sistemas, reconocer cuál método usar es menos simple, ya sea porque no hay variables despejadas o porque ninguna de las variables tiene coeficientes iguales o coeficientes opuestos. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 & \text{Ecuación A} \\ 3x - 9y = 18 & \text{Ecuación B} \end{cases}$$

Para solucionar este sistema con el método de eliminación, primero necesitamos reescribir una, o ambas ecuaciones, de manera que una variable se pueda eliminar. Para lograrlo, podemos multiplicar ambos lados de una ecuación por el mismo factor. Recordemos que hacer esto no cambia la igualdad entre los dos lados de la ecuación, así que los valores de x y de y que hacen que la primera ecuación sea verdadera, también hacen que la ecuación nueva sea verdadera.

Hay diferentes maneras de eliminar una variable con esta estrategia. Podemos, por ejemplo:

- Multiplicar la ecuación A por 3 para obtener $6x + 9y = 45$. Sumarle esta ecuación a la ecuación B elimina y.

$$\begin{cases} 6x + 9y = 45 & \text{Ecuación A1} \\ 3x - 9y = 18 & \text{Ecuación B} \end{cases}$$

- Multiplicar la ecuación B por $\frac{2}{3}$ para obtener $2x - 6y = 12$. Restarle esta ecuación a la ecuación A elimina x.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 & \text{Ecuación A} \\ 2x - 6y = 12 & \text{Ecuación B1} \end{cases}$$

- Multiplicar la ecuación A por $\frac{1}{2}$ para obtener $x + \frac{3}{2}y = 7\frac{1}{2}$ y multiplicar la ecuación B por $\frac{1}{3}$ para obtener $x - 3y = 6$. Restarle una ecuación a la otra elimina x.

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y = 7\dfrac{1}{2} & \text{Ecuación A2} \\ x - 3y = 6 & \text{Ecuación B2} \end{cases}$$

Cada múltiplo de una ecuación original es equivalente a la ecuación original. Así que cada nuevo par de ecuaciones es equivalente al sistema original y tiene la misma solución.

Solucionemos el sistema original usando el primer sistema equivalente que encontramos antes.

$$\begin{cases} 6x + 9y = 45 & \text{Ecuación A1} \\ 3x - 9y = 18 & \text{Ecuación B} \end{cases}$$

- Sumar las dos ecuaciones elimina la y y da la ecuación nueva $9x = 63$, o $x = 7$.

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 45 \\ 3x - 9y = 18 \quad + \\ \hline 9x + 0 \ = 63 \\ x = 7 \end{array}$$

- Agrupar $x = 7$ y la ecuación original $3x - 9y = 18$ nos da otro sistema equivalente.

$$\begin{cases} x = 7 \\ 3x - 9y = 18 \end{cases}$$

- Reemplazar x por 7 en la segunda ecuación nos permite despejar y.

$$\begin{aligned} 3(7) - 9y &= 18 \\ 21 - 9y &= 18 \\ \text{-}9y &= \text{-}3 \\ y &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cuando solucionamos un sistema con el método de eliminación, en esencia, estamos escribiendo una serie de **sistemas equivalentes**, o sistemas que tienen la misma solución. Cada sistema equivalente nos acerca cada vez más a la solución del sistema original.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x - 9y = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 3x - 9y = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7 \\ 3x - 9y = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$